

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY OPERATORÓW

ROZDZIAŁ I

Funkcje operatorowe i ich pochodne

§ 1. Funkcje operatorowe

Weźmy pod uwagę operator t^λ (§ 55). Ponieważ za λ można podstawić dowolną liczbę rzeczywistą, mamy tu faktycznie do czynienia z pewną funkcją, która przyporządkowuje operatorom liczbom λ . Symbol t^λ oznacza wartość tej funkcji w punkcie λ .

Ogólnie będziemy się zajmowali funkcjami $f(\lambda)$, które przyporządkowują dowolne operatory liczbom λ . Takie funkcje będziemy nazywali *funkcjami operatorowymi*. Sam symbol $f(\lambda)$, nie poprzedzony wyrazem *funkcja*, będzie oznaczał wartość rozważanej funkcji dla danej liczby λ , czyli operator tej liczbie przyporządkowany. Ponadto będziemy często używali terminu *funkcja operatorowa* $f(\lambda)$ lub krócej *funkcja* $f(\lambda)$, nie wprowadzając dla niej osobnego symbolu.

Jeżeli λ jest ustalone i dodatnie, to operator t^λ jest funkcją zmiennej t

$$t^\lambda = \left\{ \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\} \quad (\lambda > 0).$$

Zauważmy, że pod znakiem klamry występują dwie zmienne λ i t , klamra zaś niejako *kasuje* zmienną t (i tylko zmienną t), która nie jest uwidoczniiona po lewej stronie wzoru.

Ogólnie, mając funkcję dwóch zmiennych $f(\lambda, t)$, określoną dla $t \geq 0$ i dla pewnych wartości λ , będziemy pisali

$$(1.1) \quad f(\lambda) = \{f(\lambda, t)\},$$

zupełnie podobnie jak piszemy $a = \{a(t)\}$. Wzór (1) określa funkcję operatorową szczególnego rodzaju, mianowicie taką, która przy-

porządkowuje rozważanym wartościom λ operatory, będące funkcjami zmiennej t . Taką funkcję $f(\lambda)$ nazwiemy *funkcją operatorową parametryczną*. Na przykład funkcja operatorowa t^λ jest parametryczna w przedziale $0 < \lambda < \infty$. Funkcja $f(\lambda) = \{\lambda^2 + t^2\}$ jest parametryczna dla wszystkich wartości λ .

O funkcjach operatorowych parametrycznych zakładamy raz na zawsze, że ich wartości są funkcjami zmiennej t , należącymi do klasy \mathcal{K} (str. 99).

Inny szczególny typ funkcji operatorowych stanowią te funkcje, których wartościami są operatory liczbowe, czyli po prostu liczby; będziemy je nazywali *funkcjami liczbowymi*. Funkcja $f(\lambda) = \lambda^2$ jest przykładem funkcji liczbowej przy wszelkich wartościach λ . Natomiast funkcja t^λ jest liczbową tylko w jednym punkcie $\lambda = 0$, ponieważ $t^0 = 1$. Dla $\lambda < 0$ funkcja t^λ nie jest ani parametryczna, ani liczbową.

Ćwiczenie. Udowodnić równości:

$$(\alpha) \quad \{\lambda + t\}^2 = t^2 \lambda^2 + 2t^\lambda \lambda + t^\lambda;$$

$$(\beta) \quad \{\lambda^2 + t^2\} \{\lambda^2 - t^2\} = t^2 \lambda^4 - 4t^\lambda;$$

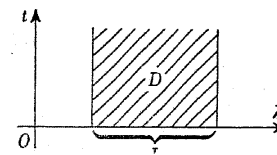
$$(\gamma) \quad \{e^{\alpha\lambda + \beta t}\} = \frac{e^{\alpha\lambda}}{s - \beta};$$

$$(\delta) \quad \{\cos(\lambda - t)\} = \frac{1}{1 + s^2} (\sin \lambda + s \cos \lambda).$$

§ 2. Ciągłość funkcji operatorowej

Funkcję operatorową $f(\lambda)$ będziemy nazywali *ciągłą w przedziale skończonym* I (otwartym lub zamkniętym), jeżeli w tym przedziale da się przedstawić jako iloczyn pewnego operatora q i funkcji parametrycznej $f_1(\lambda) = \{f_1(\lambda, t)\}$, takiej że funkcja dwóch zmiennych $f_1(\lambda, t)$ jest ciągła (w zwykłym sensie) w obszarze $D(\lambda \in I, 0 \leq t < \infty)$:

$$f(\lambda) = q f_1(\lambda).$$



Rys. 71.

W ten sposób dzięki czynnikowi q pojęcie ciągłości funkcji operatorowej sprowadza się do pojęcia zwykłej ciągłości funkcji dwóch zmiennych.

Na przykład funkcja $f(\lambda) = \{\lambda^2 + t^2\}$ jest ciągłą w każdym skończonym przedziale I , gdyż można napisać

$$f(\lambda) = 1 \cdot \{\lambda^2 + t^2\},$$

gdzie funkcja $\lambda^2 + t^2$ jest ciągła w obszarze D . Tutaj jako czynnik q przyjęliśmy po prostu liczbę 1.

Jeżeli funkcja dwóch zmiennych $f(\lambda, t)$ jest ciągła (w zwykłym sensie) w obszarze D , to funkcja operatorowa parametryczna

$$(2.1) \quad f(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$$

jest ciągła w przedziale I .

Może się zdarzyć, że pewna funkcja $h(\lambda, t)$ nie jest ciągła w obszarze D , a mimo to funkcja operatorowa $h(\lambda) = \{h(\lambda, t)\}$ jest ciągła w sensie podanej na początku definicji. Przypuśćmy na przykład, że

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq t. \end{cases}$$

Funkcja $h(\lambda, t)$ jest nieciągła na prostej $\lambda = t$ (rysunek 72), a mimo to funkcja operatorowa $h(\lambda) = \{h(\lambda, t)\}$

jest ciągła, gdyż możemy napisać

$$(2.2) \quad h(\lambda) = s\{h_1(\lambda, t)\},$$

gdzie $h_1(\lambda, t)$ jest funkcją ciągłą w zwykłym sensie, określoną równościami

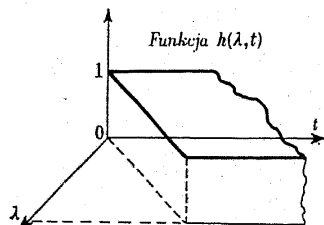
$$(2.3) \quad h_1(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ t - \lambda & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq t. \end{cases}$$

Dla sprawdzenia wzoru (2.2) wystarczy napisać

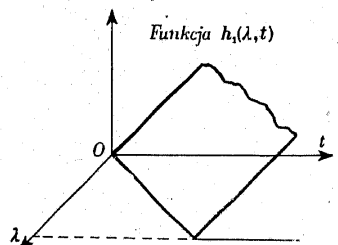
$$l\{h(\lambda, t)\} = \left\{ \int_0^t h(\lambda, \tau) d\tau \right\} = \{h_1(\lambda, t)\}.$$

Funkcję operatorową $h(\lambda)$, w powyższy sposób zdefiniowaną, będziemy nazywali *funkcją Heaviside'a*. Jest ona określona dla $\lambda \geq 0$ i ciągła w każdym przedziale skończonym.

Funkcja $H(\lambda) = s \cdot h(\lambda)$ ($\lambda \geq 0$) nie jest już funkcją parametryczną, gdyż jej wartości są operatorami, które nie redukują się do funkcji zmiennej t ; na przykład dla $\lambda = 0$ mamy $H(0) = 1$. Jest jednak



Rys. 72.



Rys. 73.

ona ciągła w każdym przedziale skończonym, gdyż możemy oczywiście napisać

$$(2.4) \quad H(\lambda) = s^2\{h_1(\lambda, t)\}.$$

Dla funkcji $H(\lambda)$ łatwo jest udowodnić przy $\lambda, \mu \geq 0$ wzór

$$(2.5) \quad H(\lambda)H(\mu) = H(\lambda + \mu).$$

Istotnie, wzór ten jest równoważny wzorowi

$$h(\lambda)h(\mu) = h_1(\lambda + \mu) \quad \text{dla } \lambda, \mu \geq 0$$

i w konsekwencji wzorowi

$$(2.6) \quad \int_0^t h(\lambda, t - \tau)h(\mu, \tau) d\tau = h_1(\lambda + \mu, t) \quad \text{dla } \lambda, \mu, t \geq 0.$$

Jeżeli $0 \leq t \leq \lambda + \mu$, to prawa strona wzoru (2.6) jest zerem. Ale wtedy też funkcja podcałkowa jest równa zeru, gdyż dla $0 < \tau < \mu$ znika czynnik $h(\mu, \tau)$, a dla $\mu < \tau \leq t$ znika czynnik $h(\lambda, t - \tau)$. Wobec tego lewa strona wzoru jest równa prawej.

Jeżeli $0 \leq \lambda + \mu < t$, to prawa strona wzoru (2.6) jest równa $t - \lambda - \mu$. Ale wtedy czynnik $h(\mu, \tau)$ jest równy zeru w przedziale $0 \leq \tau < \mu$, a poza nim równy 1, czynnik zaś $h(\lambda, t - \tau)$ jest równy zeru przy $0 \leq t - \tau < \lambda$, lub co na jedno wychodzi przy $t - \lambda < \tau$, a poza tym jest równy 1. Zatem iloczyn $h(\lambda, t - \tau)h(\mu, \tau)$ będzie równy 1 w przedziale $\mu < \tau \leq t - \lambda$, a poza nim będzie równy zeru. Stąd całka we wzorze (2.6) redukuje się do postaci

$$\int_{\mu}^{t-\lambda} 1 d\tau = t - \lambda - \mu.$$

Wzór (2.6) i tym samym wzór (2.5) jest udowodniony.

Definicję funkcji $H(\lambda)$ rozszerzamy na wartości ujemne λ , pisząc

$$H(\lambda) = \frac{1}{H(-\lambda)} \quad \text{dla } \lambda < 0.$$

Przy tej definicji widać, że wzór (2.5) zachodzi przy wszelkich λ i μ rzeczywistych.

Funkcja $H(\lambda)$ przypomina zwykłą funkcję wykładniczą e^λ , która również spełnia równanie funkcyjne (2.5), gdyż

$$e^\lambda e^\mu = e^{\lambda + \mu};$$

poza tym jest też $e^0 = 1$. Obie funkcje $H(\lambda)$ i e^λ należą do obszerniejszej klasy funkcji wykładniczych, o których będziemy mówili szczegółowo w paragrafie 9. Tutaj zauważmy jeszcze, że funkcja $H(\lambda)$ jest ciągła w każdym przedziale skończonym $\alpha \leq \lambda \leq \beta$. Istotnie, możemy napisać

$$H(\lambda) = H(\alpha) \cdot H(\lambda - \alpha)$$

i wobec (2.4)

$$H(\lambda) = H(\alpha) s^2 \cdot \{h_1(\lambda - \alpha, t)\},$$

co już dowodzi ciągłości.

Rozszerzymy teraz ogólną definicję ciągłości na dowolne przedziały nieskończone. Funkcję operatorową będziemy nazywali *ciągłą w danym przedziale nieskończonym*, jeżeli jest ciągła w każdym przedziale skończonym w nim zawartym.

Funkcja $H(\lambda)$ jest ciągła w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Uwaga. Gdyby dla przedziału nieskończonego przyjąć bezpośrednią definicję ciągłości funkcji, taką jak podaliśmy dla przedziału skończonego, to funkcja $H(\lambda)$ nie byłaby ciągłą w przedziale $(-\infty, +\infty)$, gdyż nie istnieje taki operator q , żeby było $H(\lambda) = q\{H_1(\lambda, t)\}$ i żeby funkcja $H_1(\lambda, t)$ była ciągłą dla $0 \leq t < \infty$ i wszystkich λ rzeczywistych. W ten sposób funkcja $H(\lambda)$ byłaby ciągłą w każdym przedziale skończonym a nieciągłą w przedziale $(-\infty, +\infty)$, co jest niezgodne z intuicją. Podobna sytuacja zachodziłaby dla wielu innych funkcji. Aby jej uniknąć, zdefiniowaliśmy ciągłość funkcji najpierw dla przedziałów skończonych, a dopiero potem rozszerzyliśmy definicję na przedziały nieskończone.

W paragrafie 17 będzie nam przydatne następujące proste twierdzenie:

Jeżeli $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ są funkcjami operatorowymi ciągłymi i różnymi od zera w pewnym przedziale I , takimi że

$$f(\lambda)^2 = g(\lambda)^2,$$

to wtedy $f(\lambda) = g(\lambda)$ w całym przedziale I lub $f(\lambda) = -g(\lambda)$ w całym przedziale I .

Jest oczywiste, że dla każdego punktu λ z osobna jest $f(\lambda) = g(\lambda)$ lub $f(\lambda) = -g(\lambda)$. Gdyby dla jakiegoś punktu λ_1 rozważanego przedziału zachodziła pierwsza równość, dla innego zaś λ_2 druga równość, to z założenia, że funkcje są stale różne od zera, wynikałoby, że mię-

dzy punktami λ_1 i λ_2 któraś z funkcji $f(\lambda)$ lub $g(\lambda)$ byłaby nieciągła. Łatwe do uzupełnienia szczegóły tego dowodu pomijamy.

Zauważmy na koniec, że jeżeli funkcja operatorowa $f(\lambda)$ jest liczbowa, to podana w tym paragrafie definicja pokrywa się ze zwykłą definicją ciągłości. Istotnie, możemy wówczas napisać $f(\lambda) = s\{f(\lambda)\}$. Ze zwykłej ciągłości $f(\lambda)$ wynika, że jest ona również ciągła jako funkcja dwóch zmiennych λ i t (stała względem t) i na odwrót.

§ 3. Pochodna ciągła funkcji operatorowej

Dla zastosowań rachunku operatorów wystarcza pojęcie *pocho-
dnej ciągłej*. Zaczniemy od zdefiniowania takiej właśnie pochodnej, odkładając definicję ogólniejszą do paragrafu 7.

Będziemy mówili, że funkcja operatorowa $f(\lambda)$ jest w przedziale skończonym I *różniczkowalna w sposób ciągły*, jeżeli można napisać

$$(3.1) \quad f(\lambda) = q f_1(\lambda) \quad (q \neq 0),$$

gdzie q jest operatorem, $f_1(\lambda)$ zaś funkcją parametryczną $\{f_1(\lambda, t)\}$, mającą pochodną cząstkową $\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t)\right\}$ ciągłą w całym obszarze $D(\lambda \in I, 0 \leq t < \infty)$.

Będziemy wówczas mówili, że funkcja $f(\lambda)$ ma w przedziale I pochodną ciągłą:

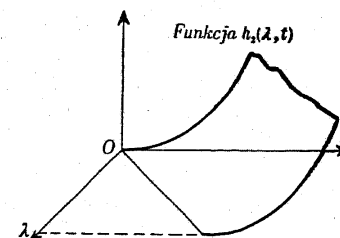
$$(3.2) \quad f'(\lambda) = q \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t) \right\}.$$

Dla przykładu pokażemy, że funkcja $H(\lambda)$, zdefiniowana w poprzednim paragrafie, ma pochodną ciągłą w każdym przedziale skończonym $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Istotnie, wobec (2.4) możemy napisać przy $\lambda \geq 0$

$$H(\lambda) = s^2 \cdot \{h_1(\lambda, t)\} = s^2 \{h_2(\lambda, t)\},$$

gdzie funkcja $h_2(\lambda, t)$ jest zdefiniowana równościami

$$h_2(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t \leq \lambda, \\ \frac{1}{2}(t - \lambda)^2 & \text{dla } 0 \leq \lambda < t \end{cases}$$



Rys. 74.

i ma pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial \lambda} h_2(\lambda, t)$ ciągłą w obszarze $D(0 \leq \lambda < \infty, 0 \leq t < \infty)$. Stąd

$$(3.3) \quad H'(\lambda) = s^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} h_2(\lambda, t) \right\} \quad \text{dla } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0,$$

gdzie λ_0 jest dowolną liczbą dodatnią.

Jeżeli funkcja $f(\lambda)$ jest różniczkowalna (w sposób ciągły) w przedziale I , to pochodną $f'(\lambda)$ można przedstawić w postaci (3.2) na nieskończenie wiele sposobów. Istotnie, niech a będzie dowolną funkcją klasy \mathcal{C} różną od zera; możemy wtedy napisać

$$f(\lambda) = \frac{q}{a} f_2(\lambda),$$

gdzie funkcja $f_2(\lambda) = \left\{ \int_0^t a(t-\tau) f_1(\lambda, \tau) d\tau \right\}$ jest nadal parametryczna i ma pochodną cząstkową ciągłą w obszarze D . Wobec tego pochodną funkcji $f(\lambda)$ można też napisać w postaci

$$f'(\lambda) = \frac{q}{a} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_2(\lambda, t) \right\}.$$

Może się nasunąć wątpliwość, czy definicja pochodnej jest jednoznaczna. Musimy więc jeszcze sprawdzić, że jeżeli funkcja $f(\lambda)$ da się w przedziale I przedstawić na dwa sposoby

$$(3.4) \quad f(\lambda) = q_1 \{f_1(\lambda, t)\} \quad \text{i} \quad f(\lambda) = q_2 \{f_2(\lambda, t)\},$$

tak że pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t)$ i $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_2(\lambda, t)$ będą ciągłe w obszarze D , to zawsze będziemy mieli

$$(3.5) \quad q_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t) \right\} = q_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_2(\lambda, t) \right\}.$$

Istotnie, można dobrać takie funkcje a_1, a_2 i $c \neq 0$ klasy \mathcal{C} , że

$$(3.6) \quad q_1 = \frac{a_1}{c} \quad \text{i} \quad q_2 = \frac{a_2}{c}.$$

Wtedy z równości (3.4) wynika

$$a_1 \{f_1(\lambda, t)\} = a_2 \{f_2(\lambda, t)\},$$

czyli

$$\int_0^t a_1(t-\tau) f_1(\lambda, \tau) d\tau = \int_0^t a_2(t-\tau) f_2(\lambda, \tau) d\tau \quad \text{w obszarze } D.$$

Stąd mamy po zróżniczkowaniu względem λ

$$\int_0^t a_1(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, \tau) d\tau = \int_0^t a_2(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \lambda} f_2(\lambda, \tau) d\tau$$

czyli

$$a_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(t, \lambda) \right\} = a_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_2(t, \lambda) \right\}.$$

Po podzieleniu przez c dochodzimy do równości (3.5). W ten sposób jednoznaczność definicji została udowodniona.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli funkcja $f(\lambda)$ jest liczbowa, to powyższa definicja pokrywa się ze zwykłą definicją pochodnej ciągłej. Istotnie, można wtedy napisać $f(\lambda) = s\{f(\lambda)\}$; o ile zwykła pochodna $\frac{d}{d\lambda} f(\lambda)$ jest ciągła, to

$$f'(\lambda) = s \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda) \right\} = s \left\{ \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) \right\} = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda).$$

Stąd wynika w szczególności, że *pochodna funkcji liczbowej jest zawsze funkcją liczbową*.

§ 4. Własności pochodnej ciągłej

Własność I. Jeżeli funkcja $f(\lambda)$ jest stała w pewnym przedziale I , to znaczy, jeżeli każdej wartości λ z tego przedziału jest przyporządkowany jeden i ten sam operator c , to $f'(\lambda) = 0$. Odwrotnie, jeżeli $f'(\lambda) = 0$ w I , to funkcja $f(\lambda)$ jest stała.

Istotnie, każdy operator c jest postaci $\frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in \mathcal{C}$, $b \neq 0$. Jeżeli więc $f(\lambda) = c$, to można napisać

$$f'(\lambda) = \frac{1}{b} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} a(t) \right\} = \frac{1}{b} \{0\} = 0.$$

Na odwrót, jeżeli $f'(\lambda) = 0$, to we wzorze (3.2) jest $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t) = 0$ dla λ i t należących do obszaru D , skąd wynika, że $f_1(\lambda, t)$ nie zależy od λ , czyli że funkcja przedstawiona wzorem (2.1) jest stała.

Własność II. Jeżeli funkcje operatorowe $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ mają pochodne ciągłe $f'(\lambda)$ i $g'(\lambda)$ w przedziale I , to ich suma i różnica mają również pochodne ciągłe w tym przedziale i jest

$$[f(\lambda) \pm g(\lambda)]' = f'(\lambda) \pm g'(\lambda).$$

Istotnie, z założenia istnienia pochodnej ciągłej mamy

$$f(\lambda) = q_1 f_1(\lambda) \quad \text{i} \quad g(\lambda) = q_2 g_1(\lambda),$$

gdzie $f_1(\lambda)$ i $g_1(\lambda)$ są funkcjami parametrycznymi o pochodnych cząstkowych względem λ ciągłych w obszarze D . Można wówczas napisać (3.6) i w konsekwencji

$$f(\lambda) = \frac{1}{c} f_2(\lambda) \quad \text{i} \quad g(\lambda) = \frac{1}{c} g_2(\lambda),$$

gdzie $f_2(\lambda) = a_1 f_1(\lambda)$ i $g_2(\lambda) = a_2 g_1(\lambda)$. Zatem

$$f(\lambda) \pm g(\lambda) = \frac{1}{c} \{f_2(\lambda, t) \pm g_2(\lambda, t)\},$$

a stąd

$$\begin{aligned} [f(\lambda) \pm g(\lambda)]' &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [f_2(\lambda, t) \pm g_2(\lambda, t)] \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_2(\lambda, t) \right\} \pm \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} g_2(\lambda, t) \right\} = f'(\lambda) \pm g'(\lambda). \end{aligned}$$

Własność III. Jeżeli funkcje $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ mają pochodne ciągłe $f'(\lambda)$ i $g'(\lambda)$ w przedziale I , to ich iloczyn ma również pochodną ciągłą w tym przedziale i zachodzi wzór

$$[f(\lambda)g(\lambda)]' = f'(\lambda)g(\lambda) + f(\lambda)g'(\lambda).$$

Istotnie, mamy

$$\begin{aligned} [f(\lambda)g(\lambda)]' &= q_1 q_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^t f_1(\lambda, t-\tau) g_1(\lambda, \tau) d\tau \right\} = \\ &= q_1 q_2 \left\{ \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t-\tau) g_1(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^t f_1(\lambda, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \lambda} g_1(\lambda, \tau) d\tau \right\} = \\ &= q_1 q_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t) \right\} g_1(\lambda) + q_1 q_2 f_1(\lambda) \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} g_1(\lambda, t) \right\} = f'(\lambda)g(\lambda) + f(\lambda)g'(\lambda). \end{aligned}$$

Własność IV. Jeżeli c jest dowolnym operatorem, funkcja zaś operatorowa $f(\lambda)$ ma pochodną ciągłą w przedziale I , to iloczyn $cf(\lambda)$ ma również pochodną ciągłą w tym przedziale i zachodzi wzór

$$[cf(\lambda)]' = cf'(\lambda).$$

Własność ta wynika od razu z własności I i III.

Własność V. Jeżeli funkcje operatorowe $g(\lambda)$ i $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$ mają pochodne ciągłe w przedziale I , to funkcja $f(\lambda)$ ma również pochodną ciągłą w tym przedziale, przy czym zachodzi wzór

$$\left[\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} \right]' = \frac{f'(\lambda)g(\lambda) - f(\lambda)g'(\lambda)}{g(\lambda)^2}.$$

Własność ta wynika z własności III, gdyż

$$f'(\lambda) = \left[\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} g(\lambda) \right]' = \left[\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} \right]' g(\lambda) + \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} g'(\lambda),$$

skąd przez łatwe przekształcenie otrzymujemy żądany wzór.

Własność VI. Jeżeli $f(\lambda)$ ma pochodną ciągłą $f'(\lambda)$ w przedziale I , $\varphi(\lambda)$ zaś jest funkcją liczbową o wartościach należących do I , mającą pochodną ciągłą w przedziale K , to funkcja złożona $F(\lambda) = f[\varphi(\lambda)]$ ma pochodną ciągłą w K i zachodzi wzór

$$F'(\lambda) = f'[\varphi(\lambda)] \cdot \varphi'(\lambda).$$

Istotnie, wobec (3.1) i (3.2) mamy

$$F(\lambda) = q\{f_1[\varphi(\lambda), t]\}$$

i oznaczając $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t)$ przez $f_0(\lambda, t)$

$$F'(\lambda) = q\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1[\varphi(\lambda), t] \right\} = q\{f_0[\varphi(\lambda), t]\} \cdot \varphi'(\lambda) = q\{f_0[\varphi(\lambda), t]\} \cdot \varphi'(\lambda).$$

Ćwiczenie. Obliczyć na dwa sposoby (raz wprost z definicji i drugi raz na podstawie dowiedzionych w tym paragrafie własności) pochodne następujących funkcji operatorowych:

$$(\alpha) \quad f(\lambda) = \{\lambda^2 + t^2\} = \lambda^2 + 2t^2;$$

$$(\beta) \quad f(\lambda) = \{\lambda^4 + \lambda^2 t^2 + t^4\} = \lambda^4 + 2t^2 \lambda^2 + 2t^4;$$

$$(\gamma) \quad f(\lambda) = \{\sin(\lambda + t)\} = \frac{1}{1+s^2} (s \sin \lambda + \cos \lambda);$$

$$(\delta) \quad f(\lambda) = \frac{1}{\{\lambda^2 + t^2\}} = \frac{1}{\lambda^2 + 2t^2}.$$

§ 5. Pochodne ciągłe wyższych rzędów

Niech $f'(\lambda)$ będzie pochodną ciągłą funkcji operatorowej $f(\lambda)$. Jeżeli $f'(\lambda)$ ma pochodną ciągłą, to nazywamy ją *drugą pochodną ciągłą* funkcji $f(\lambda)$ i oznaczamy przez $f''(\lambda)$. Podobnie przez trzecią pochodną ciągłą $f'''(\lambda)$ rozumiemy pochodną ciągłą drugiej pochodnej ciągłej i tak dalej.

Łatwo zauważyć, że jeżeli funkcja $f(\lambda)$ ma w przedziale I drugą pochodną ciągłą $f''(\lambda)$, to istnieje taki operator q_2 i funkcja parametryczna $\{f_2(\lambda, t)\}$ mająca drugą pochodną cząstkową $\left\{\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} f_2(\lambda, t)\right\}$ ciągłą w obszarze $D(\lambda \in I, 0 \leq t < \infty)$, że

$$f(\lambda) = q_2 \{f_2(\lambda, t)\},$$

$$f''(\lambda) = q_2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} f_2(\lambda, t) \right\}.$$

Ogólnie, jeżeli funkcja $f(\lambda)$ ma w przedziale n -tą pochodną ciągłą $f^{(n)}(\lambda)$, to istnieje taki operator q_n i funkcja parametryczna $\{f_n(\lambda, t)\}$ mająca n -tą pochodną cząstkową $\left\{\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f_n(\lambda, t)\right\}$ ciągłą w obszarze D , że

$$(5.1) \quad f(\lambda) = q_n \{f_n(\lambda, t)\}$$

i

$$(5.2) \quad f^{(n)}(\lambda) = q_n \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f_n(\lambda, t) \right\}.$$

Z drugiej strony, jeżeli dla pewnej funkcji $f(\lambda)$ warunek (5.1) jest spełniony i pochodna cząstkowa $\left\{\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f_n(\lambda, t)\right\}$ jest ciągła w obszarze D , to stąd wynika istnienie n -tej pochodnej ciągłej $f^{(n)}(\lambda)$, określonej wzorem (5.2). Zatem warunki (5.1) i (5.2) mogą służyć dla funkcji operatorowych za równoważną definicję n -tej pochodnej ciągłej.

Ćwiczenie. Znaleźć drugą i trzecią pochodną ciągłą funkcji operatorowych, podanych w ćwiczeniach z paragrafu poprzedniego.

§ 6. Pochodna ciągła w przedziale nieskończonym

Dotychczas zakładaliśmy, że przedział I jest skończony. Definicję pochodnej ciągłej rozszerzamy na przedziały nieskończone podobnie jak definicję ciągłości funkcji. Powiemy mianowicie, że funkcja operatorowa $f(\lambda)$ ma w przedziale nieskończonym I *pochodną ciągłą* $f'(\lambda)$, jeżeli $f'(\lambda)$ jest pochodną ciągłą w każdym przedziale skończonym, zawartym w I .

Własności I-VI z paragrafu 4 przenoszą się od razu na pochodne w przedziałach nieskończonych.

Zupełnie tak samo rozszerza się na przedziały nieskończone definicję pochodnych ciągłych dowolnego rzędu.

W paragrafie 3 udowodniliśmy, że funkcja $H(\lambda)$ ma pochodną ciągłą w każdym przedziale skończonym $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Ze wzoru (3.3) wynika ponadto, że

$$(6.1) \quad H'(\lambda) = s^3 \{-h_1(\lambda, t)\} = -sH(\lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

Jeżeli $[\alpha, \beta]$ jest dowolnie ustalonym przedziałem skończonym, to wobec wzoru (2.5), który jak wykazaliśmy jest prawdziwy dla wszelkich λ i μ rzeczywistych, możemy napisać

$$H(\lambda) = H(\alpha)H(\lambda - \alpha)$$

i na podstawie własności IV i VI z paragrafu 4

$$H'(\lambda) = H(\alpha)H'(\lambda - \alpha).$$

Stąd wynika już istnienie pochodnej ciągłej $H'(\lambda)$ w przedziale $[\alpha, \beta]$. Ponieważ przedział ten może być ustalony dowolnie, udowodniliśmy, że funkcja operatorowa $H(\lambda)$ ma pochodną ciągłą w przedziale nieskończonym $(-\infty, \infty)$.

Wobec (3.3) możemy znowu napisać

$$H'(\lambda) = H(\alpha) \cdot [-sH(\lambda - \alpha)] = -sH(\lambda);$$

zatem przy wszelkich rzeczywistych wartości dla λ zachodzi wzór

$$(6.2) \quad H'(\lambda) = -sH(\lambda).$$

§ 7. Ogólna definicja pochodnej

Rozważania z tego paragrafu będą miały bardziej teoretyczny charakter i czytelnik, który ma na celu jedynie zastosowania, może je zupełnie pominąć.

Widzieliśmy w paragrafie 3, że jeżeli $f(\lambda)$ jest funkcją operatorową liczbową, która ma pochodną ciągłą $f'(\lambda)$ w sensie operatorowym, to $f'(\lambda)$ jest zarazem pochodną w zwykłym znaczeniu, oczywiście ciągłą. Pokażemy tu, jak można podać ogólniejszą definicję pochodnej operatorowej, która w przypadku funkcji liczbowych pokrywa się ze zwykłą definicją pochodnej, niekoniecznie ciągłej.

Mówimy, że funkcja $f(\lambda)$ jest *różniczkowalna w punkcie λ_0* , jeżeli da się przedstawić w otoczeniu tego punktu jako iloczyn

$$f(\lambda) = q\{f_1(\lambda, t)\},$$

gdzie q jest operatorem, a $\{f_1(\lambda, t)\}$ funkcją parametryczną, taką że iloraz

$$(7.1) \quad \frac{f_1(\lambda, t) - f_1(\lambda_0, t)}{\lambda - \lambda_0}$$

zmierza do granicy dla $\lambda \rightarrow \lambda_0$ jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$.

Granica ta jest oczywiście równa pochodnej cząstkowej $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda_0, t)$, która jest ciągła względem t . Natomiast z istnienia pochodnej cząstkowej, choćby ciągłej względem t , nie wynika jeszcze *jednostajne* istnienie granicy ilorazu (7.1). Iloczyn $q\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda_0, t)\right\}$ będziemy nazywali *pochodną funkcji operatorowej $f(\lambda)$ w punkcie λ_0* i oznaczali symbolem $f'(\lambda_0)$.

Pochodna taka jest uogólnieniem pochodnej ciągłej, gdyż z założenia, że funkcja $\frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t)$ jest ciągła (względem obydwu zmiennych) wynika już, że granica ilorazu (7.1) istnieje jednostajnie w każdym przedziale $0 \leq t \leq t_0$. Istotnie, iloraz (7.1) jest równy pochodnej $\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, t)\right]_{\lambda=\xi}$, gdzie ξ jest zawarte między λ_0 a λ . Gdy $\lambda \rightarrow \lambda_0$, pochodna ta zmierza do granicy jednostajnie w przedziale $0 \leq t \leq t_0$.

Uogólniona w ten sposób pochodna zachowuje wszystkie własności I-VI. Gdyby nie zakładać jednostajnej ciągłości ilorazu, to nie wszystkie z tych własności dałyby się udowodnić.

ROZDZIAŁ II

Funkcje wykładnicze

§ 8. Równanie różniczkowe $x'(\lambda) = wx(\lambda)$

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Jeżeli dane są operatory w, k oraz liczba rzeczywista λ_0 , to istnieje co najwyżej jedna funkcja operatorowa $x(\lambda)$, spełniająca dla wszystkich λ rzeczywistych równanie

$$(I) \quad x'(\lambda) = wx(\lambda)^1$$

i warunek

$$(8.1) \quad x(\lambda_0) = k.$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwie funkcje operatorowe $x_1(\lambda)$ i $x_2(\lambda)$, spełniające równanie (I) i warunek (8.1). Wtedy funkcja

$$x(\lambda) = x_1(\lambda) - x_2(\lambda)$$

spełnia również równanie (I) i jest

$$(8.2) \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Wystarczy udowodnić, że jest $x(\lambda) = 0$ dla wszystkich λ rzeczywistych.

Wprowadzając funkcję pomocniczą

$$y(\lambda) = x(\lambda)x(2\mu - \lambda),$$

gdzie μ jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą, mamy

$$y'(\lambda) = x'(\lambda)x(2\mu - \lambda) - x(\lambda)x'(2\mu - \lambda).$$

Wobec (I) mamy dalej

$$y'(\lambda) = wx(\lambda)x(2\mu - \lambda) - x(\lambda)wx(2\mu - \lambda) = 0;$$

¹⁾ Z założenia, że funkcja $x(\lambda)$ ma pochodną, wynika, że jest ciągła. z równania (I) wynika dalej, że pochodna $x'(\lambda)$ jest ciągła.

zatem funkcja $y(\lambda)$ jest stała dla wszystkich λ rzeczywistych. Ale wobec (8.2) jest

$$y(\lambda_0) = x(\lambda_0)x(2\mu - \lambda_0) = 0,$$

skąd wynika, że $y(\lambda) = 0$ dla wszystkich λ , czyli że

$$x(\lambda)x(2\mu - \lambda) = 0.$$

Podstawiając w szczególności $\lambda = \mu$, otrzymujemy stąd $x(\mu)^2 = 0$ i wreszcie

$$x(\mu) = 0.$$

Ponieważ μ było ustalone dowolnie, twierdzenie jest dowiedzione.

§ 9. Uogólnione funkcje wykładnicze

Jeżeli w jest liczbą, to funkcja wykładnicza $x(\lambda) = e^{\lambda w}$ spełnia równanie

$$(I) \quad x'(\lambda) = wx(\lambda)$$

i warunek

$$(9.1) \quad x(0) = 1.$$

Na podstawie dowiedzonego twierdzenia jest to jedyna funkcja o tych własnościach (co wiadomo zresztą z klasycznej analizy). Zatem warunki (I) i (9.1) mogą służyć za definicję funkcji wykładniczej.

Gdy w nie jest liczbą, lecz dowolnym operatorem, to warunki (I) i (9.1) definiują uogólnione funkcje wykładnicze, dla których konsekwentnie będziemy używali symbolu $e^{\lambda w}$. Innymi słowy, jeżeli przy danym operatorze w funkcja operatorowa $x(\lambda)$ spełnia warunki (I) i (9.1), to będziemy pisali

$$x(\lambda) = e^{\lambda w}.$$

Wobec twierdzenia z poprzedniego paragrafu wartości każdej funkcji wykładniczej są zawsze różne od zera.

Udowodniliśmy w paragrafie 6, że funkcja operatorowa, zdefiniowana w paragrafie 2 spełnia warunki

$$H'(\lambda) = -sH(\lambda) \quad \text{i} \quad H(0) = 1;$$

będziemy więc ją odtąd stale zapisywali w postaci wykładniczej

$$H(\lambda) = e^{-\lambda s}.$$

Wzór (2.5) przyjmie wówczas kształt

$$(9.2) \quad e^{-\lambda s} \cdot e^{-\mu s} = e^{-(\lambda + \mu)s}.$$

Funkcję $e^{-\lambda s}$ będziemy nazywali *funkcją wykładniczą hiperboliczną*, gdyż jak zobaczymy w paragrafie 18 jest ona związana z równaniem różniczkowym hiperbolicznym.

Oprócz funkcji wykładniczej klasycznej e^{λ} i funkcji wykładniczej hiperbolicznej $e^{-\lambda s}$ funkcja stała $x(\lambda) = 1$ może być również uważana za funkcję wykładniczą, gdyż spełnia warunki

$$x'(\lambda) = 0 \cdot x(\lambda) \quad \text{i} \quad x(0) = 1.$$

Później (w paragrafach 29, 48, 52 i 54) poznamy wielką różnorodność uogólnionych funkcji wykładniczych. Na razie zajmmy się bliżej własnościami funkcji hiperbolicznej.

§ 10. Operatory przesunięcia

Zgodnie z definicją funkcji $H(\lambda)$ podaną w paragrafie 2; mamy dla $\lambda \geq 0$ wzór

$$(10.1) \quad e^{-\lambda s} = s\{h(\lambda, t)\} \quad (\lambda \geq 0),$$

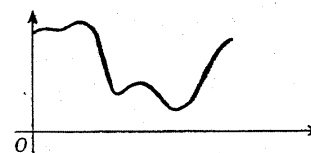
gdzie $h(\lambda, t)$ jest funkcją Heaviside'a, określoną równościami

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq t. \end{cases}$$

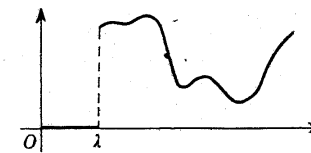
Korzystając ze wzoru (10.1) łatwo jest udowodnić następujące twierdzenie:

Jeżeli $\{f(t)\}$ jest dowolną funkcją (klasy \mathcal{K}), to

$$e^{-\lambda s}\{f(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda \\ f(t - \lambda) & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq t \end{cases}.$$



Rys. 75. Wykres funkcji $\{f(t)\}$.



Rys. 76. Wykres funkcji $e^{-\lambda s}\{f(t)\}$.

Twierdzenie to ma bardzo prostą interpretację geometryczną, jak to widać z rysunków 75 i 76. Pomnożenie danej funkcji $\{f(t)\}$

przez $e^{-\lambda s}$ powoduje przesunięcie jej wykresu o długość λ w dodatnim kierunku osi t . Z tego powodu wartości funkcji wykładniczej hiperbolicznej będziemy nazywali *operatorami przesunięcia*.

Wypowiedziane twierdzenie można udowodnić wprost przez sprawdzenie. Istotnie, mamy

$$e^{-\lambda s}\{f(t)\} = s\{h(\lambda, t)\}\{f(t)\} = s\{F(\lambda, t)\},$$

gdzie

$$F(\lambda, t) = \int_0^t h(\lambda, t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Ale widać, że

$$F(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ \int_0^{t-\lambda} f(\tau) d\tau & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq t, \end{cases}$$

a stąd

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ f(t-\lambda) & \text{dla } 0 \leq \lambda < t. \end{cases}$$

Ponieważ $F(\lambda, 0) = 0$, więc

$$e^{-\lambda s}\{f(t)\} = s\{F(\lambda, t)\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F(\lambda, t) \right\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda, \\ f(t-\lambda) & \text{dla } 0 \leq \lambda < t. \end{cases}$$

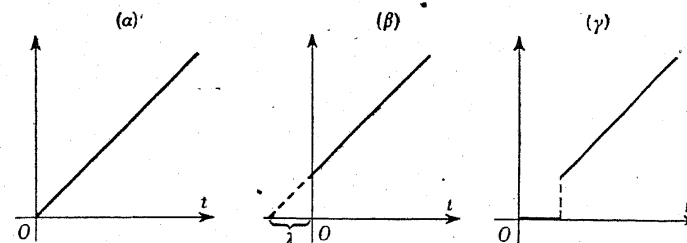
Geometryczna interpretacja operatora przesunięcia dobrze wyjaśnia znaczenie wzoru (9.2): mówi on, że jeżeli wykres funkcji przesunąć najpierw o długość λ a potem o długość μ , to wypadnie na to samo, gdyby go od razu przesunąć o długość $\lambda + \mu$.

Jeżeli funkcja $\{f(t)\}$ jest równa zero w przedziale $0 \leq t \leq a$, to wykres jej można również przesunąć w lewo, mnożąc tę funkcję przez operator $e^{\lambda s}$, byleby było $0 < \lambda \leq a$.

Jeżeli funkcja $\{f(t)\}$ jest różna od zera w pobliżu punktu $t=0$, to mnożąc ją przez operator $e^{\lambda s}$ ($\lambda > 0$), zauważymy ciekawe zjawisko. Przypuśćmy na przykład, że $\{f(t)\} = \{t\}$. Pomnożeniu przez $e^{\lambda s}$ odpowiada przesunięcie wykresu w lewo o długość λ . Lecz wtedy wykres wysunie się częściowo poza punkt $t=0$ na ujemną część osi t . Tymczasem w rachunku operatorów rozważamy funkcje tylko w przedziale $0 \leq t < \infty$, a więc część wykresu odpowiadająca ujemnym wartościom t traci znaczenie. Gdybyśmy tę część po prostu odrzucili, to po pomnożeniu przez $e^{-\lambda s}$ nie otrzymalibyśmy funkcji wyjściowej, tylko inną, przedstawioną na rysunku 77 (γ), wbrew równości

$$e^{-\lambda s} \cdot e^{\lambda s}\{t\} = 1 \cdot \{t\} = \{t\}.$$

Zjawisko to wyjaśnia się w ten sposób, że funkcja $\{t\}$, lub ogólniej każda funkcja różna od zera w pobliżu punktu $t=0$, przestaje być funkcją po pomnożeniu przez $e^{\lambda s}$ ($\lambda > 0$) i staje się pew-



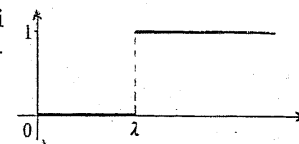
Rys. 77.

nym operatorem. Po pomnożeniu tego operatora przez $e^{-\lambda s}$ funkcja wraca niejako z krainy duchów i przyjmuje znowu swą skromną postać zwykłej funkcji.

Dla oswojenia się z własnościami operatorów przesunięcia rozpatrzmy jeszcze kilka przykładów.

Przykład 1. Operator

$$\frac{e^{-\lambda s}}{s}$$



Rys. 78.

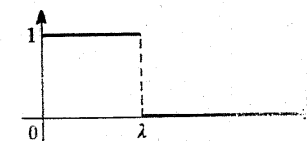
przedstawia (przy ustalonym λ) funkcję, wyobrażoną na rysunku 78.

Wynika to wprost z wzoru (10.1),

$$\text{gdyż } \frac{e^{-\lambda s}}{s} = \{h(\lambda, t)\}.$$

Przykład 2. Operator

$$\frac{1}{s}(1 - e^{-\lambda s})$$



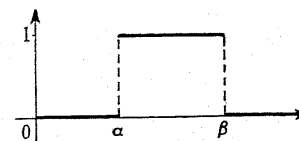
Rys. 79.

jest równy funkcji $\{1 - h(\lambda, t)\}$, która ma wykres podany na rysunku 79.

Przykład 3. Operator

$$\frac{1}{s}(e^{-\alpha s} - e^{-\beta s})$$

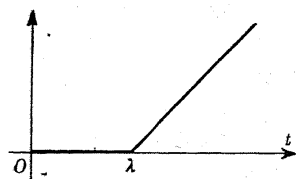
jest równy funkcji $\{h(\alpha, t) - h(\beta, t)\}$, której wykres przedstawia rysunek 80.



Rys. 80.

Przykład 4. Operator

$$\frac{1}{s^2} e^{-\lambda s} \quad (\lambda > 0)$$

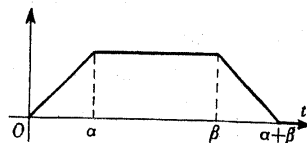


Rys. 81.

jest funkcją, której wykres powstaje z wykresu funkcji $\frac{1}{s^2} = \{t\}$ przez przesunięcie w prawo o długość λ (rysunek 81).

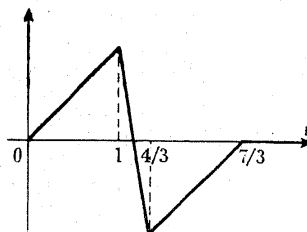
Przez kombinowanie tych funkcji można otrzymać różne łamane, na przykład:

$$\frac{1}{s^2} (1 - e^{-\alpha s} - e^{-\beta s} + e^{-(\alpha+\beta)s})$$



Rys. 82.

$$\frac{1}{s^2} (1 - 7e^{-s} + 7e^{-4s/3} - e^{-7s/3})$$

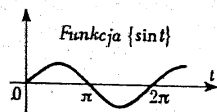


Rys. 83.

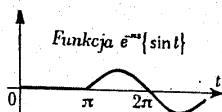
Przykład 5. Znaczenie geometryczne operatora

$$\frac{1}{1+s^2} (1 + e^{-\pi s})$$

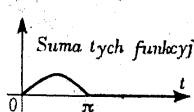
znajdziemy, przesuwając wykres funkcji $\frac{1}{1+s^2} = \{\sin t\}$ o długość π i dodając graficznie przesunięty wykres do nieprzesuniętego. Otrzymamy w ten sposób połowę jednej fali (rysunek 86).



Rys. 84.



Rys. 85.

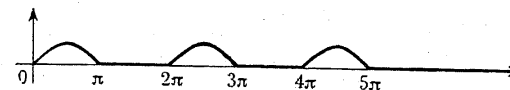


Rys. 86.

Przykład 6. Wykres dla operatora

$$\frac{1}{1+s^2} (1 + e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s})$$

łatwo otrzymać z ostatniego wykresu, przesuwając go raz o 2π ,



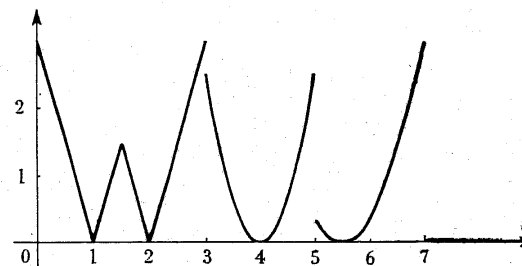
Rys. 87.

drugi raz o 4π i nakładając na siebie wszystkie trzy wykresy (rysunek 87).

Przykład 7. Na zakończenie podajemy jeszcze jeden operator, nieco bardziej skomplikowany:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{6}{s^2} (e^{-s} - e^{-3s/2} + e^{-2s}) + \\ & + \left(\frac{5}{s^3} - \frac{8}{s^2} - \frac{1}{2s} \right) e^{-3s} - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{s^3} + \frac{16}{s^2} + \frac{13}{2s} \right) e^{-5s} - \left(\frac{8}{3s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{13}{3s} \right) e^{-7s}. \end{aligned}$$

Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że jest on funkcją o wykresie przedstawionym na rysunku 88.



Rys. 88.

jeżeli za ε_n przyjmujemy większą z liczb

$$|e^{-\beta/n} - 1| \quad \text{ i } \quad |e^{-\alpha/n} - 1|,$$

to w każdym razie ciąg ε_n będzie zbieżny do zera i będziemy mieli

$$|e^{-t/n} - 1| \leq \varepsilon_n,$$

co dowodzi jednostajnej zbieżności w przedziale $\alpha \leq t \leq \beta$.

Można natomiast udowodnić, że w żadnym przedziale nieskończonym ciąg $\{e^{-t/n}\}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu $\{f_n(t)\}$ są równe funkcji $\{f(t)\}$

$$\{f_n(t)\} = \{f(t)\},$$

to ciąg dąży do funkcji $\{f(t)\}$ jednostajnie w rozważanym przedziale, ponieważ możemy napisać

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon_n,$$

gdzie $\varepsilon_n = 0$ dla wszystkich wartości n .

Z analizy wiadomo¹⁾, że jeżeli funkcje $\{f_n(t)\}$ są ciągłe i ciąg ich jest zbieżny jednostajnie w pewnym przedziale I , to granica $\{f(t)\}$ jest również funkcją ciągłą w I .

Jeżeli funkcje $\{f_n(t)\}$ są klasy \mathcal{C} , to znaczy są określone i ciągłe w przedziale $0 \leq t < \infty$, i jeżeli ciąg $\{f_n(t)\}$ jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$, to granica $\{f(t)\}$ jest także funkcją klasy \mathcal{C} .

Istotnie, funkcja $\{f(t)\}$ jest ciągła w każdym przedziale $0 \leq t \leq t_0$, a więc tym samym w przedziale nieskończonym $0 \leq t < \infty$.

Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $\{f_n(t)\}$ jest zbieżny do funkcji $\{f(t)\}$ jednostajnie w pewnym przedziale $\alpha \leq t \leq \beta$, to istnieje taka liczba M , że

$$|f_n(t)| \leq M \quad \text{ i } \quad |f(t)| \leq M$$

w tym przedziale.

Istotnie, funkcja $\{f(t)\}$ jako ciągła jest ograniczona w przedziale $\alpha \leq t \leq \beta$:

$$(11.2) \quad |f(t)| \leq N.$$

¹⁾ Zob. np. Kuratowski [22], str. 88, lub Leja [23], str. 179.

ROZDZIAŁ III

Ciągi i szeregi operatorów

§ 11. Jednostajna zbieżność

Mówimy, że ciąg funkcji $\{f_n(t)\}$ ograniczonych w pewnym przedziale I jest zbieżny do granicy $\{f(t)\}$ *jednostajnie* w tym przedziale, jeżeli istnieje ciąg liczbowy ε_n zbieżny do zera, taki że

$$(11.1) \quad |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

dla wszystkich t należących do przedziału I .

Na przykład ciąg $\left\{\frac{\sin nt}{n}\right\}$ jest zbieżny do zera jednostajnie w każdym przedziale, gdyż ciąg liczbowy $\frac{1}{n}$ jest zbieżny do zera i ponadto jest

$$\left|\frac{\sin nt}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n}$$

dla wszystkich t rzeczywistych.

Ciąg $\left\{\frac{nt - \sin nt}{n}\right\}$ jest zbieżny do funkcji $\{t\}$ jednostajnie w każdym przedziale, gdyż

$$\left|\frac{nt - \sin nt}{n} - t\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Jeżeli ciąg liczb a_n jest zbieżny do a , to ciąg funkcji stałych $\{a_n\}$ jest zbieżny do $\{a\}$ jednostajnie w każdym przedziale. Istotnie, ciąg $\varepsilon_n = |a_n - a|$ dąży do zera i można napisać

$$|a_n - a| \leq \varepsilon_n.$$

Ciąg $\{e^{-t/n}\}$ jest zbieżny do $\{1\}$ jednostajnie w każdym przedziale skończonym $\alpha \leq t \leq \beta$. Istotnie, w przedziale tym zachodzą nierówności

$$e^{-\beta/n} - 1 \leq e^{-t/n} - 1 \leq e^{-\alpha/n} - 1;$$

Z nierówności (11.1) wynika, że

$$|f_n(t)| \leq N + \varepsilon = M,$$

gdzie ε jest największą z liczb ε_n . Wobec (11.2) jest też $|f(t)| \leq M$.

Jeżeli ciągi funkcji ciągłych $\{f_n(t)\}$ i $\{g_n(t)\}$ dążą do $\{f(t)\}$ i $\{g(t)\}$ jednostajnie w przedziale $0 \leq t \leq t_0$, to ciąg

$$\left\{ \int_0^t f_n(t-\tau) g_n(\tau) d\tau \right\}$$

dąży do

$$\left\{ \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right\}$$

jednostajnie w tym przedziale.

Dowód. Z założenia mamy

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon_n \quad \text{i} \quad |g_n(t) - g(t)| \leq \eta_n \quad (0 \leq t \leq t_0),$$

gdzie $\varepsilon_n \rightarrow 0$ i $\eta_n \rightarrow 0$. Wobec tego

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t f_n(t-\tau) g_n(\tau) d\tau - \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq \int_0^t |f_n(t-\tau) g_n(\tau) - f(t-\tau) g(\tau)| d\tau = \\ & = \int_0^t |[f_n(t-\tau) g_n(\tau) - f(t-\tau) g_n(\tau)] + [f(t-\tau) g_n(\tau) - f(t-\tau) g(\tau)]| d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t |g_n(\tau)| \cdot |f_n(t-\tau) - f(t-\tau)| d\tau + \int_0^t |f(t-\tau)| \cdot |g_n(\tau) - g(\tau)| d\tau \leq \\ & \leq \int_0^{t_0} M \varepsilon_n d\tau + \int_0^{t_0} N \eta_n d\tau = M t_0 \varepsilon_n + M t_0 \eta_n, \end{aligned}$$

gdzie M i N spełniają nierówności $|g_n(t)| \leq M$ i $|f(t)| < N$.

Ponieważ ciąg liczb $M t_0 \varepsilon_n + M t_0 \eta_n$ dąży do zera, twierdzenie jest udowodnione.

Ważne dla nas będą następujące szczególne przypadki tego twierdzenia:

Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $\{g_n(t)\}$ dąży do $\{g(t)\}$ jednostajnie w przedziale $0 \leq t \leq t_0$ i jeżeli $\{f(t)\}$ jest funkcją ciągłą w tym przedziale, to ciąg

$$\left\{ \int_0^t f(t-\tau) g_n(\tau) d\tau \right\}$$

dąży do

$$\left\{ \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right\}$$

jednostajnie w przedziale $0 \leq t \leq t_0$.

Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $\{g_n(t)\}$ dąży do $\{g(t)\}$ jednostajnie w przedziale $0 \leq t \leq t_0$, to ciąg

$$\left\{ \int_0^t g_n(\tau) d\tau \right\}$$

dąży do

$$\left\{ \int_0^t g(\tau) d\tau \right\}$$

jednostajnie w tym przedziale.

Ćwiczenia. 1. Udowodnić, że ciąg $\left\{ \frac{\cos nt}{n} \right\}$ jest zbieżny do zera jednostajnie w każdym przedziale.

2. Udowodnić, że ciąg $\{h(n, t)\}$ (gdzie h oznacza funkcję Heaviside'a, zdefiniowaną w paragrafie 2) jest zbieżny do zera jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$.

§ 12. Granica ciągu operatorów

Ciąg operatorów a_n nazywamy *zbieżnym* do operatora a , jeżeli istnieje operator q i ciąg funkcji f_n klasy C o następujących własnościach:

(I) Ciąg f_n dąży do pewnej granicy f jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$;

(II) $a_n = q f_n$ ($n=1, 2, \dots$);

(III) $a = q f$.

Na przykład ciąg $a_n = \{\cos nt\}$ jest zbieżny do zera, gdyż można napisać

$$\{\cos nt\} = s \left\{ \frac{\sin nt}{n} \right\},$$

a ciąg $\left\{\frac{\sin nt}{n}\right\}$ jest zbieżny do zera jednostajnie w każdym przedziale $0 \leq t \leq t_0$.

Już z tego prostego przykładu widać, że pojęcie zbieżności, które przyjmujemy w rachunku operatorów, jest bardzo ogólne, ciąg bowiem $\{\cos nt\}$ nie jest zbieżny w żadnym sensie klasycznej analizy.

Jeszcze ciekawszy jest ciąg $a_n = \{n \sin nt\}$; w każdym punkcie t , który nie jest krotnością liczby π , wartości jego oscylują pomiędzy $-\infty$ a $+\infty$. Mimo to jest on zbieżny w sensie operatorowym i jego granica jest równa liczbie 1. Istotnie, łatwo sprawdzić, że

$$\{n \sin nt\} = s^2 \left\{t - \frac{\sin nt}{n}\right\};$$

ciąg $\left\{t - \frac{\sin nt}{n}\right\}$ jest zbieżny do $\{t\}$ jednostajnie w każdym przedziale $0 \leq t \leq t_0$. Wobec tego granicą ciągu a_n jest operator $a = s^2 \{t\} = s^2 t^2 = 1$.

Można też łatwo podać ciąg funkcji $a_n = \{a_n(t)\}$ zbieżny do operatora różniczkowego s . Przyjmijmy $a_n = \{n^2 \cos nt\}$. Wtedy można napisać

$$a_n = s^3 \left\{t - \frac{\sin nt}{n}\right\},$$

skąd, jak przed chwilą, znajdujemy granicę $a = s^3 \{t\} = s^3 t^2 = s$.

Elementami wszystkich podanych wyżej ciągów są funkcje klasy \mathcal{C} . Można oczywiście rozważać też ciągi, których elementami nie są funkcje; takim jest na przykład ciąg $a_n = \frac{s}{n}$. Jest on zbieżny do zera, co wynika z przedstawienia go w postaci $a_n = s^2 \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Podobnie ciąg operatorów przesunięcia $a_n = e^{-ns}$ jest zbieżny do zera, bo można go napisać w postaci $s^2 \cdot l^2 e^{-ns}$, gdzie $l^2 e^{-ns}$ jest funkcją klasy \mathcal{C} równą zeru w przedziale $0 \leq t \leq n$.

Jeżeli a_n jest ciągiem operatorów liczbowych, to podana na początku paragrafu definicja zbieżności pokrywa się ze zwykłą definicją zbieżności ciągu liczbowego. Istotnie, można wtenczas napisać

$$a_n = s \{a_n\} \quad \text{i} \quad a = s \{a\},$$

gdzie ciąg funkcji stałych $\{a_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do $\{a\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy a_n jest zbieżny w zwykłym sensie do a .

Wynika stąd w szczególności, że granicą ciągu (zbieżnego) operatorów liczbowych jest zawsze operator liczbowy czyli liczba.

Jeżeli a_n są funkcjami klasy \mathcal{K} , to ze zbieżności jednostajnej ciągu a_n w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$ wynika zbieżność tego ciągu w sensie operatorowym. Jest to oczywiste, jeżeli funkcje a_n są klasy \mathcal{C} , bo możemy wtedy przyjąć $q=1$. Jeżeli funkcje a_n są klasy \mathcal{K} , to można napisać $a_n = s \cdot l a_n$, gdzie $l a_n = \left\{\int_0^t a_n(\tau) d\tau\right\}$ jest już ciągiem funkcji klasy \mathcal{C} , zbieżnym jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$.

Dla sprawdzenia poprawności definicji zbieżności operatorów należy udowodnić, że dla każdego ciągu operatorów może istnieć co najwyżej jedna granica. Przypuśćmy, że a i b są granicami ciągu a_n . Wtedy istnieją takie operatory q i r oraz ciągi funkcji f_n i g_n klasy \mathcal{C} , zbieżne do f i g w każdym przedziale $0 \leq t \leq t_0$, że

$$a_n = q f_n = r g_n, \quad a = q f, \quad b = r g.$$

Niech q_1 , r_1 i $c \neq 0$ będą funkcjami klasy \mathcal{C} , takimi że $q = \frac{q_1}{c}$ i $r = \frac{r_1}{c}$.

Wtedy

$$q_1 f_n = r_1 g_n$$

czyli

$$\int_0^t q_1(t-\tau) f_n(\tau) d\tau = \int_0^t r_1(t-\tau) g_n(\tau) d\tau \quad (0 \leq t < \infty);$$

ponieważ ciągi f_n i g_n są zbieżne jednostajnie w każdym przedziale, mamy stąd dla $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^t q_1(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t r_1(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (0 \leq t < \infty),$$

czyli

$$q_1 f = r_1 g.$$

Po podzieleniu tej równości przez c , mamy $q f = r g$, czyli $a = b$, co dowodzi, że granica może być tylko jedna.

Ćwiczenia. 1. Udowodnić, że każdy z następujących ciągów jest zbieżny do liczby 1:

$$\{n e^{-nt}\}, \quad \{n^2 t e^{-nt}\}, \quad \{n - n^2 t + |n - n^2 t|\}, \quad \left\{\frac{1}{n} t^{1/n-1}\right\}.$$

2. Udowodnić, że ciąg

$$\{n^3 \sin nt + n^4 t \cos nt\}$$

jest zbieżny do granicy $2s^2$.

3. Udowodnić, że jeżeli a i b są dowolnymi operatorami, to ciąg $a + b e^{-ns}$ jest zbieżny do granicy a .

§ 13. Fizyczne interpretacje operatora przesunięcia

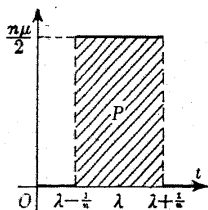
Geometryczną interpretację operatora $e^{-\lambda s}$ omówiliśmy w paragrafie 10; tutaj omówimy jeszcze pewne interpretacje fizyczne.

Zbadajmy przy dowolnie ustalonym $\lambda > 0$ granicę ciągu funkcji

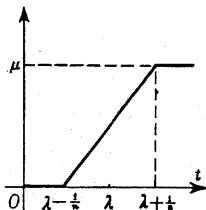
$$\{f_n(t)\} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda - \frac{1}{n} \text{ i dla } \lambda + \frac{1}{n} < t \\ \frac{n\mu}{2} & \text{dla } \lambda - \frac{1}{n} < t < \lambda + \frac{1}{n} \end{cases},$$

gdzie μ jest pewną liczbą dodatnią.

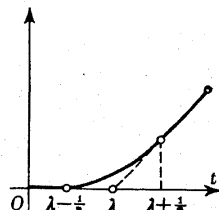
Gdy n jest dość duże, to wykres funkcji $\{f_n(t)\}$ ma kształt podany na rysunku 89; pole zakreskowanego prostokąta P wynosi μ . Rysunek 90 przedstawia wykres funkcji $l\{f_n(t)\}$, rysunek zaś 91



Rys. 89.



Rys. 90.



Rys. 91.

wykres funkcji $l^2\{f_n(t)\}$. Z rysunku 91 widać, że różnica między funkcją $l^2\{f_n(t)\}$ a funkcją $l^2e^{-\lambda s}$, której odpowiada łamana łącząca punkty oznaczone małymi kółeczkami, jest mniejsza od $\frac{\mu}{n}$. Wynika stąd, że ciąg funkcji $l^2\{f_n(t)\}$ dąży do granicy $l^2e^{-\lambda s}$ jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$. W konsekwencji ciąg

$$\{f_n(t)\} = s^2 \cdot l^2\{f_n(t)\}$$

ma granicę $s^2 \cdot l^2e^{-\lambda s} = e^{-\lambda s}$.

Pole P możemy sobie interpretować jako masę μ rozłożoną równomiernie na odcinku $\left(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}\right)$. W granicy masa ta skupia

się w punkcie λ . Możemy więc przyjąć, że operator $\mu e^{-\lambda s}$ oznacza masę μ w punkcie λ .

Podobnie liczbę μ można interpretować jako masę μ skupioną w punkcie λ .

Do innej interpretacji fizycznej operatora $\mu e^{-\lambda s}$ dochodzimy, traktując funkcje $\{f_n(t)\}$ jako krótkotrwałe siły elektromotoryczne, czyli jako impulsy napięcia. Jeżeli założymy, że czas trwania impulsu jest bardzo krótki, to możemy, idealizując warunki, przyjąć w granicy, że

$$E = \mu e^{-\lambda s}.$$

W szczególności, gdy $\lambda = 0$, to $E = \mu$ i mamy do czynienia z impulsem napięcia w chwili $t = 0$ (zob. § 40 części I).

Przykład. Znaleźć prąd w obwodzie elektrycznym o impedancji Z i prądzie zwarcia 0, o ile włączymy do niego siłę elektromotoryczną E , złożoną z dwóch impulsów o wartości E_0 działających w odstępie czasu T .

Przyjmując, że pierwszy impuls działa w chwili $t = 0$, możemy napisać

$$E = E_0(1 + e^{-Ts}).$$

Z równania prądu $ZI = E$ znajdujemy

$$I = \frac{E_0}{Z}(1 + e^{-Ts}).$$

Przypuśćmy w szczególności, że $Z = Ls + R$. Wtedy

$$I = \frac{E_0}{Ls + R}(1 + e^{-Ts}) = \left\{ \frac{E_0}{L} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right\} (1 + e^{-Ts}).$$

Mając na uwadze geometryczne znaczenie operatora przesunięcia, otrzymujemy stąd

$$I(t) = \begin{cases} \frac{E_0}{L} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) & \text{dla } 0 \leq t < T, \\ \frac{E_0}{L} \left(1 + \exp\left(-\frac{RT}{L}\right)\right) \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) & \text{dla } T < t < \infty. \end{cases}$$

Funkcje f_n możemy też traktować fizycznie jako zwykłą siłę. Wtedy granicę $\mu e^{-\lambda s}$ należy uważać za uderzenie działające w chwili $t = \lambda$. Jest to trzecia interpretacja fizyczna operatora przesunięcia.

Operator $\mu e^{-\lambda s}$ można otrzymać jako granicę ogólniejszych ciągów funkcyjnych. Przypuśćmy mianowicie, że funkcja $\{f_n(t)\}$ ($n=1, 2, \dots$) klasy \mathcal{K} jest nieujemna w przedziale $\lambda - \varepsilon_n < t < \lambda + \varepsilon_n$ i równa zero poza tym przedziałem. Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda - \varepsilon_n}^{\lambda + \varepsilon_n} f_n(\tau) d\tau = \mu,$$

to ciąg $\{f_n(t)\}$ dąży w sensie operatorowym do granicy $\mu e^{-\lambda s}$. Dówd pomijamy.

§ 14. Własności granicy ciągu operatorów

Granica ciągu operatorów ma podobne własności jak zwykła granica ciągu liczbowego. Jeżeli $a_n = a$, gdzie a jest dowolnie ustalonym operatorem, to $\lim a_n = a$. Jeżeli ciąg a_n jest zbieżny do pewnej granicy, to każdy ciąg wybrany z niego jest zbieżny do tej samej granicy. Ważne są również twierdzenia o dodawaniu, odejmowaniu i mnożeniu ciągów. Jeżeli mianowicie istnieją granice $\lim a_n = a$ i $\lim b_n = b$, to ciągi $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ i $a_n b_n$ mają również granice i zachodzą równości

$$\lim (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim (a_n - b_n) = a - b \quad \text{ i } \quad \lim a_n b_n = ab.$$

Istotnie, z założenia o zbieżności ciągów a_n i b_n wynika istnienie takich operatorów q i r , że zachodzą równości

$$(14.1) \quad a_n = q\{f_n(t)\}, \quad a = q\{f(t)\},$$

$$(14.2) \quad b_n = r\{g_n(t)\}, \quad b = r\{g(t)\},$$

gdzie $\{f_n(t)\}$ i $\{g_n(t)\}$ są ciągami funkcji klasy \mathcal{C} zbieżnymi do $\{f(t)\}$ i $\{g(t)\}$ jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$.

Możemy napisać $q = \frac{q_1}{c}$ i $r = \frac{r_1}{c}$, gdzie q_1 , r_1 i $c \neq 0$ są funkcjami klasy \mathcal{C} . Mamy równości

$$a_n + b_n = \frac{1}{c} \left\{ \int_0^t q_1(t-\tau) f_n(\tau) d\tau + \int_0^t r_1(t-\tau) g_n(\tau) d\tau \right\}$$

i wobec założenia o jednostajnej zbieżności ciągów $\{f_n(t)\}$ i $\{g_n(t)\}$

$$\begin{aligned} \lim (a_n + b_n) &= \frac{1}{c} \left\{ \int_0^t q_1(t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_0^t r_1(t-\tau) g(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \frac{q_1}{c} \{f(t)\} + \frac{r_1}{c} \{g(t)\} = a + b. \end{aligned}$$

Zupełnie podobnie dowodzi się twierdzenia o różnicy ciągów.

Aby udowodnić twierdzenie o iloczynie ciągów, piszemy

$$a_n b_n = q r \left\{ \int_0^t f_n(t-\tau) g_n(\tau) d\tau \right\},$$

skąd znowu na podstawie założenia o jednostajnej zbieżności ciągów $\{f_n(t)\}$ i $\{g_n(t)\}$ wynika, że

$$\lim a_n b_n = q r \left\{ \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right\} = q r \{f(t)\} \{g(t)\} = ab.$$

Szczególny przypadek mnożenia ciągów mamy wówczas, gdy jeden z ciągów jest stały, na przykład $a_n = a$. Wtedy z założenia $\lim b_n = b$ wynika, że

$$\lim ab_n = ab.$$

Z twierdzenia o mnożeniu ciągów wynika, że jeżeli $\lim a_n = a$ i $\lim b_n = b$ ($b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla $n=1, 2, \dots$) i jeżeli ciąg ilorazowy $\frac{a_n}{b_n}$ ma granicę, to

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Założenia zbieżności ciągu $\frac{a_n}{b_n}$ nie można tu pominąć (w przeciwieństwie do klasycznej teorii ciągów), jak to pokazuje następujący przykład¹⁾:

Niech

$$a_n = 1 \quad \text{ i } \quad b_n = \frac{s}{n} - 1;$$

¹⁾ Podany przez C. Ryll-Nardzewskiego.

wtedy $\lim a_n = 1$ i $\lim b_n = -1$. Natomiast ciąg

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{s-n} = \{ne^{nt}\}$$

nie jest zbieżny.

Istotnie, gdyby był zbieżny, to istniałaby taka funkcja

$$(14.3) \quad f \in C \quad (f \neq 0),$$

że ciąg

$$\frac{a_n}{b_n} f = \left\{ n \int_0^t e^{n\tau} f(t-\tau) d\tau \right\}$$

byłby jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $0 \leq t \leq t_0$, co łatwo wynika z definicji zbieżności. Wówczas ciąg

$$\int_0^{t_0} e^{n\tau} f(t_0-\tau) d\tau$$

byłby ograniczony. Stąd na podstawie twierdzenia o momentach (zob. część I, § 11) wynikałoby, że $f(t_0-\tau) = 0$ dla $0 \leq \tau \leq t_0$, czyli $f(t) = 0$ dla $0 \leq t \leq t_0$. Ponieważ t_0 może być ustalone dowolnie, więc $f(t) = 0$ dla wszystkich $t \geq 0$, co jest sprzeczne z (14.3).

Udowodnimy jeszcze twierdzenie, że jeżeli $f(\lambda)$ jest funkcją operatorową, ciągłą w pewnym przedziale I , i λ_0 należy do I , to dla każdego ciągu liczbowego λ_n , którego elementy należą do I , zbieżnego do granicy λ_0 , mamy

$$\lim f(\lambda_n) = f(\lambda_0).$$

Istotnie, z założenia ciągłości wynika istnienie operatora q i funkcji parametrycznej $f_1(\lambda)$, ciągłej w obszarze $D(\lambda \in I, 0 \leq t < \infty)$ i takiej że

$$f(\lambda) = qf_1(\lambda).$$

Gdy $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, to ciąg $\{f_1(\lambda_n, t) - f_1(\lambda_0, t)\}$ dąży do zera jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$. Stąd wynika, że ciąg $f(\lambda_n) = qf_1(\lambda_n)$ dąży (w sensie operatorowym) do granicy

$$qf_1(\lambda_0) = f(\lambda_0).$$

§ 15. Szeregi operatorów

Piszemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots = A,$$

jeżeli ciąg sum cząstkowych

$$A_n = a_0 + \dots + a_n$$

jest zbieżny do A . Mówimy wówczas, że rozważany szereg ma sumę A .

Na przykład

$$1 + l + l^2 + \dots = \frac{1}{1-l},$$

ponieważ ciąg sum cząstkowych

$$1 + \dots + l^n = s \left\{ 1 + \frac{l}{1!} + \dots + \frac{l^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

jest zbieżny do operatora mającego postać

$$s\{e^l\} = \frac{s}{s-1} = \frac{1}{1-l}.$$

Ciekawą klasę szeregów stanowią szeregi operatorów przesunięcia. Mianowicie szereg

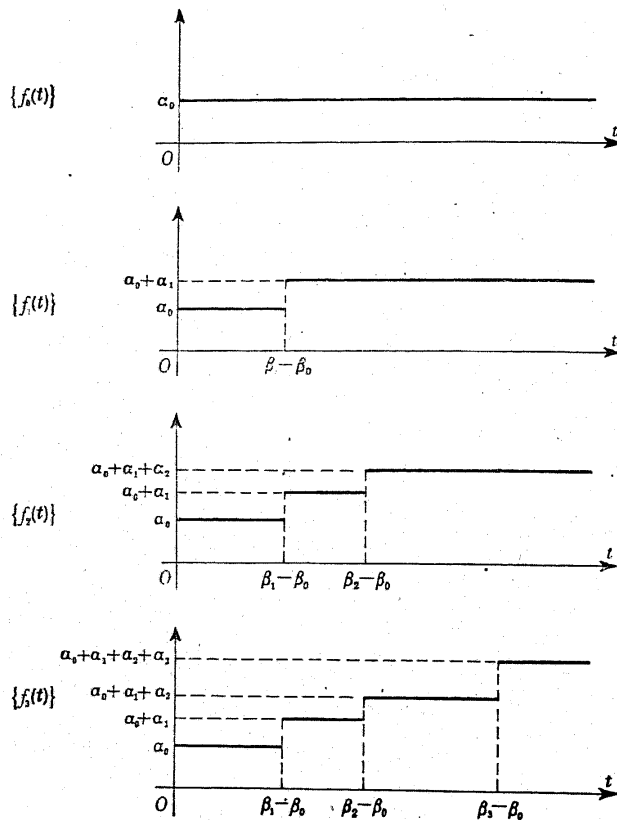
$$(15.1) \quad a_0 e^{-\beta_0 s} + a_1 e^{-\beta_1 s} + \dots,$$

gdzie współczynniki a_0, a_1, \dots są zupełnie dowolnymi liczbami zespolonymi, a wykładniki β_0, β_1, \dots liczbami rzeczywistymi rosnącymi do ∞ , jest zawsze zbieżny.

Dla udowodnienia tego rozpatrzmy najpierw ciąg funkcji $\{f_n(t)\}$, zdefiniowanych równościami

$$\begin{aligned} f_0(t) &= la_0, \\ f_1(t) &= l(a_0 + a_1 e^{-(\beta_1 - \beta_0)s}), \\ f_2(t) &= l(a_0 + a_1 e^{-(\beta_1 - \beta_0)s} + a_2 e^{-(\beta_2 - \beta_0)s}), \\ f_3(t) &= l(a_0 + a_1 e^{-(\beta_1 - \beta_0)s} + a_2 e^{-(\beta_2 - \beta_0)s} + a_3 e^{-(\beta_3 - \beta_0)s}), \\ &\dots \end{aligned}$$

O ile a_1, a_2, \dots są dodatnie, funkcjom tym odpowiadają następujące wykresy:



Rys. 92.

Łatwo zauważyć, że dla dalszych funkcji

$$\{f_4(t)\}, \{f_5(t)\}, \dots$$

wykres w przedziale $0 \leq t \leq \beta_3 - \beta_0$ pozostanie już taki sam, jak dla funkcji $\{f_3(t)\}$. Ogólnie biorąc, w każdym z góry danym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$ funkcje $\{f_n(t)\}$ będą, począwszy od pewnego n , identyczne. Będzie tak niezależnie od tego, czy współczynniki a_1, a_2, \dots są rzeczywiste czy zespolone, choć w ostatnim przypadku

wykres na płaszczyźnie nie da się wykonać. Wynika stąd, że ciąg funkcji $\{f_n(t)\}$ jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$.

Stąd dalej wynika, że ciąg sum cząstkowych

$$a_0 e^{-\beta_0 s} + \dots + a_n e^{-\beta_n s} = s e^{-\beta_0 s} \cdot l(a_0 + \dots + a_n e^{-(\beta_n - \beta_0)s})$$

jest zbieżny i tym samym, że szereg (15.1) jest zbieżny.

Sumę tego szeregu możemy sobie interpretować jako masy a_0, a_1, \dots (dodatnie, ujemne lub nawet zespolone) rozłożone w punktach β_0, β_1, \dots albo też impulsy lub uderzenia o wartościach a_0, a_1, \dots pojawiające się w chwilach $t = \beta_0, \beta_1, \dots$

Szczególnie ważne są szeregi

$$1 + e^{-\beta s} + e^{-2\beta s} + \dots,$$

gdzie β jest dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Mnożąc taki szereg przez $1 - e^{-\beta s}$, mamy

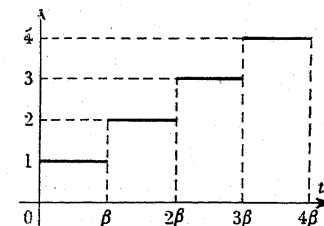
$$(1 - e^{-\beta s})(1 + e^{-\beta s} + e^{-2\beta s} + \dots) = \\ = (1 + e^{-\beta s} + e^{-2\beta s} + \dots) - (e^{-\beta s} + e^{-2\beta s} + \dots) = 1.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{1}{1 - e^{-\beta s}} = 1 + e^{-\beta s} + e^{-2\beta s} + \dots$$

Łatwo zauważyć, że operator

$$\frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{-\beta s}}$$



Rys. 93.

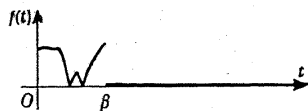
jest funkcją, przedstawiającą linię schodkową (rysunek 93).

Ważną rolę w zastosowaniach gra operator

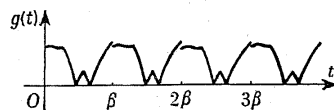
$$(15.2) \quad g = \frac{f}{1 - e^{-\beta s}} \quad (\beta > 0),$$

gdzie $f = \{f(t)\}$ jest dowolną funkcją, która poza przedziałem $0 \leq t \leq \beta$ jest identycznie równa zero. Operator taki jest funkcją, której wy-

kres znajdziemy, powtarzając nieskończenie wiele razy fragment wykresu funkcji $\{f(t)\}$, odpowiadający przedziałowi $0 \leq t < \beta$ (rysunki 94 i 95).



Rys. 94.



Rys. 95.

Operator (15.2) przedstawia więc funkcję periodyczną (o ile tylko funkcja f jest równa zero poza przedziałem $(0 \leq t \leq \beta)$). Z drugiej strony, jeżeli mamy daną funkcję periodyczną g i period jej wynosi β , to wyrażenie

$$f = (1 - e^{-\beta s})g$$

przedstawia funkcję równą zero dla $t > \beta$. Mamy więc twierdzenie:

Funkcja $g = \{g(t)\}$ ($t \geq 0$) jest periodyczna wtedy i tylko wtedy, gdy daje się przedstawić w postaci

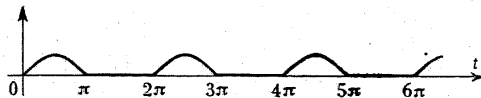
$$g = \frac{f}{1 - e^{-\beta s}},$$

gdzie β jest liczbą dodatnią, a $f = \{f(t)\}$ jest funkcją równą zero dla $t > \beta$. Liczba β jest periodem funkcji g .

Przyjmując w szczególności $\beta = 2\pi$ i $\{f(t)\} = \frac{1}{1+s^2}(1 + e^{-\pi s})$ (zob. przykład 5 z § 10), mamy (po uproszczeniu) operator

$$\frac{1}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})},$$

będący funkcją o wykresie przedstawionym na rysunku 96.



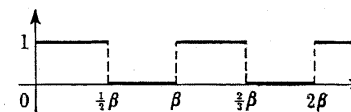
Rys. 96.

Operator ten może mieć zastosowania w elektrotechnice, przedstawia bowiem wyprostowaną falę połówkową.

Jeżeli zaś $\{f(t)\} = \frac{1}{s}(1 - e^{-\beta s/2})$, to mamy operator (15.2)

$$\frac{1}{s(1 + e^{-\beta s/2})},$$

który odpowiada tak zwanej *fali prostokątnej*; wykres jego jest przedstawiony na rysunku 97.



Rys. 97.

Wykres ten można też znaleźć bezpośrednio przez rozwinięcie w szereg

$$\frac{1}{s(1 + e^{-\beta s/2})} = \frac{1}{s}(1 - e^{-\beta s/2} + e^{-\beta s} - e^{-3\beta s/2} + \dots)$$

i zastosowanie ogólnej interpretacji szeregów postaci (15.1).

Ćwiczenie. Podać wykresy, odpowiadające następującym operatorom:

$$(\alpha) \frac{e^{-\beta s}}{s(1 + e^{-\beta s})}, \quad (\beta) \frac{s}{(s^2 + 1)(1 - e^{-\pi s})}, \quad (\gamma) \frac{s-1}{3s^2(1 - e^{-s})}.$$

zatem funkcja $y(\lambda)$ jest stała dla wszystkich λ rzeczywistych. Ale wobec (16.2) jest

$$y(\lambda_0) = x'(\lambda_0)x(2\mu - \lambda_0) + x(\lambda_0)x'(2\mu - \lambda_0) = 0,$$

skąd wynika, że $y(\lambda) = 0$ dla wszystkich λ , czyli że

$$x'(\lambda)x(2\mu - \lambda) + x(\lambda)x'(2\mu - \lambda) = 0.$$

Ponieważ μ było ustalone dowolnie, równość ta musi zachodzić dla wszystkich λ i μ rzeczywistych.

Podstawiając w szczególności $\lambda = \mu$, mamy

$$2x(\lambda)x'(\lambda) = 0,$$

czyli

$$[x(\lambda)^2]' = 0.$$

Zatem funkcja $x(\lambda)^2$ jest stała. Ponieważ zaś $x(\lambda_0)^2 = 0$, więc $x(\lambda)^2 = 0$ dla wszystkich λ i w konsekwencji $x(\lambda) = 0$ dla wszystkich λ .

Twierdzenie jest udowodnione.

§ 17. Przedłużanie rozwiązań

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

Jeżeli funkcja operatorowa $x(\lambda)$ jest określona w przedziale $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ i spełnia w tym przedziale równanie

$$(17.1) \quad x'(\lambda) = wx(\lambda),$$

gdzie w jest operatorem, to daje się ona przedłużyć poza przedział $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ tak, że będzie spełniała to samo równanie dla wszystkich λ rzeczywistych.

Dowód. Jeżeli funkcja $x(\lambda)$ jest tożsamościowo równa zeru dla $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, to twierdzenie jest oczywiste, gdyż można ją wtedy tak przedłużyć, żeby poza tym przedziałem była także równa zeru. Jeżeli nie jest tożsamościowo równa zeru, to wobec ciągłości $x(\lambda)$ istnieje wewnątrz przedziału $\alpha < \lambda < \beta$ punkt γ , w którym $x(\gamma) \neq 0$.

Wprowadzając funkcję pomocniczą

$$y(\lambda) = px(\lambda - \beta + \gamma) \quad \text{dla} \quad \beta \leq \lambda \leq \beta_1 = \gamma + 2(\beta - \gamma),$$

możemy łatwo sprawdzić, że $y(\lambda)$ spełnia w przedziale $\beta \leq \lambda \leq \beta_1$ równanie (17.1), jakkolwiek ustalimy operator p . Dobierzmy p tak,

ROZDZIAŁ IV

Równanie różniczkowe $x''(\lambda) = wx(\lambda)$

§ 16. Twierdzenie o jednoznaczności

Udowodnimy twierdzenie następujące:

Jeżeli dane są operatory w , k_0 , k_1 oraz liczba rzeczywista λ_0 , to istnieje co najwyżej jedna funkcja operatorowa $x(\lambda)$, spełniająca dla wszystkich λ rzeczywistych równanie

$$(16.1) \quad x''(\lambda) = wx(\lambda)$$

oraz warunki

$$x(\lambda_0) = k_0, \quad x'(\lambda_0) = k_1.$$

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwie takie funkcje $x_1(\lambda)$ i $x_2(\lambda)$. Wtedy różnica

$$x(\lambda) = x_1(\lambda) - x_2(\lambda)$$

spełnia równanie (16.1) i warunki

$$(16.2) \quad x(\lambda_0) = 0, \quad x'(\lambda_0) = 0.$$

Wystarczy udowodnić, że jest $x(\lambda) = 0$ dla wszystkich λ rzeczywistych.

Wprowadzając funkcję pomocniczą

$$y(\lambda) = x'(\lambda)x(2\mu - \lambda) + x(\lambda)x'(2\mu - \lambda),$$

gdzie μ jest dowolną liczbą rzeczywistą, mamy

$$y'(\lambda) = x''(\lambda)x(2\mu - \lambda) - x(\lambda)x''(2\mu - \lambda).$$

Wobec (16.1) mamy dalej

$$y'(\lambda) = wx(\lambda)x(2\mu - \lambda) - x(\lambda) \cdot wx(2\mu - \lambda) = 0;$$

żeby było $y(\beta) = x(\beta)$; przyjmijmy więc $p = \frac{x(\beta)}{x(\gamma)}$. Wtedy na podstawie równania (17.1) mamy

$$y'(\beta) = \frac{x(\beta)}{x(\gamma)} x'(\gamma) = \frac{x(\beta)}{x(\gamma)} wx(\gamma) = wx(\beta) = x'(\beta).$$

Ponieważ wartości funkcji $x(\lambda)$ i $y(\lambda)$ oraz wartości ich pochodnych zgadzają się w punkcie β , możemy te funkcje połączyć w jedną funkcję, określoną w całym przedziale $\alpha \leq \lambda \leq \beta_1$ i spełniającą w nim równanie (17.1).

Funkcję tę możemy przedłużyć w ten sam sposób na przedział $\alpha \leq \lambda \leq \beta_2$, gdzie $\beta_2 = \gamma + 2(\beta_1 - \gamma) = \gamma + 4(\beta - \gamma)$ i tak dalej aż do nieskończoności.

W podobny sposób można ją też przedłużyć na lewo aż do $-\infty$. Dowód jest więc zakończony.

Z twierdzenia tego oraz z twierdzenia udowodnionego w paragrafie 8 (str. 123) wynika, że jeżeli o pewnej funkcji $x(\lambda)$ wiemy, że spełnia równanie (17.1) w pewnym przedziale skończonym $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, to jest w nim jednoznacznie określona przez swoją wartość w dowolnie ustalonym punkcie tego przedziału.

Również dla równania drugiego rzędu zachodzi twierdzenie o przedłużaniu rozwiązań:

Jeżeli funkcja operatorowa $x(\lambda)$ jest określona w przedziale $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ i spełnia w nim równanie

$$(17.2) \quad x''(\lambda) = wx(\lambda),$$

to daje się tak przedłużyć poza przedział $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, że będzie spełniała to samo równanie dla wszystkich λ rzeczywistych.

Dowód. Jeżeli funkcja $x(\lambda)$ jest tożsamościowo równa zeru dla $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, to twierdzenie jest oczywiste. Przypuśćmy więc, że $x(\gamma) \neq 0$ dla pewnego punktu γ , o którym wobec ciągłości funkcji możemy założyć, że leży wewnątrz przedziału $\alpha < \lambda < \beta$.

Wprowadzając funkcję pomocniczą

$$\Delta(\lambda) = w[x(\lambda)]^2 - [x'(\lambda)]^2$$

mamy

$$\Delta'(\lambda) = 2wx(\lambda)x'(\lambda) - 2x'(\lambda)x''(\lambda) = 0,$$

skąd w szczególności wynika, że

$$w[x(\lambda)]^2 - [x'(\lambda)]^2 = c \quad \text{dla} \quad \alpha \leq \lambda \leq \beta,$$

gdzie c jest stałym operatorem.

Rozróżnimy dwa przypadki:

(A): $c = 0$. Wtedy jest

$$[x'(\lambda)]^2 = w[x(\lambda)]^2$$

i w szczególności

$$[x'(\gamma)]^2 = w[x(\gamma)]^2.$$

Pisząc dla krótkości

$$(17.3) \quad u = \frac{x'(\gamma)}{x(\gamma)}$$

mamy $u^2 = w$ i

$$[x'(\lambda)]^2 = [ux(\lambda)]^2.$$

Niech (α_1, β_1) będzie największym przedziałem otwartym, leżącym w $[\alpha, \beta_1]$ i zawierającym punkt γ , takim że $x(\lambda) \neq 0$ w (α_1, β_1) . Ponieważ funkcja $x(\lambda)$ jest ciągła, więc musi być stale (zob. § 2) $x'(\lambda) = ux(\lambda)$ lub $x'(\lambda) = -ux(\lambda)$. Wobec (17.3) możliwa jest tylko równość

$$(17.4) \quad x'(\lambda) = ux(\lambda) \quad (\alpha_1 < \lambda < \beta_1).$$

Ale z ciągłości $x(\lambda)$ i $x'(\lambda)$ wynika, że równanie (17.4) będzie spełnione również na końcach przedziału, a więc w całym przedziale zamkniętym $[\alpha_1, \beta_1]$. Gdyby było $x(\alpha_1) = 0$ lub $x(\beta_1) = 0$, to mielibyśmy $x(\lambda) = 0$ w całym przedziale $[\alpha_1, \beta_1]$, co jest nieprawdą. Jest więc $x(\alpha_1) \neq 0$ i $x(\beta_1) \neq 0$, skąd wynika, że $\alpha_1 = \alpha$ i $\beta_1 = \beta$.

Ponieważ $x(\lambda)$ spełnia równanie (17.4) w całym przedziale $[\alpha, \beta]$, więc daje się tak przedłużyć, żeby równanie było spełnione dla wszystkich λ rzeczywistych. Ale wówczas $x(\lambda)$ będzie też spełniać dla wszystkich λ rzeczywistych równanie (17.2), gdyż

$$x''(\lambda) = ux'(\lambda) = u \cdot ux(\lambda) = wx(\lambda).$$

(B): $c \neq 0$. Łatwo sprawdzamy, że funkcja

$$y(\lambda) = px(\lambda - \beta + \gamma) + qx'(\lambda - \beta + \gamma) \quad (\beta \leq \lambda \leq \beta_1 = \gamma + 2(\beta - \gamma))$$

spełnia w $[\beta, \beta_1]$ równanie (17.2), jakkolwiek dobierzemy operatory p i q . Operatory te można tak dobrać, żeby było $y(\beta) = x(\beta)$ i $y'(\beta) = x'(\beta)$, czyli żeby

$$\begin{aligned} px(\gamma) + qx'(\gamma) &= x(\beta), \\ px'(\gamma) + qwx(\gamma) &= x'(\beta), \end{aligned}$$

gdyż wyznacznik

$$\begin{vmatrix} x(\gamma) & x'(\gamma) \\ x'(\gamma) & wx(\gamma) \end{vmatrix} = c$$

jest różny od zera. Wtedy mamy

$$y''(\beta) = p \cdot wx(\gamma) + q \cdot wx'(\gamma) = wx(\beta) = x''(\beta).$$

Ponieważ wartości funkcji $x(\lambda)$ i $y(\lambda)$ oraz wartości ich pochodnych pierwszego i drugiego rzędu zgadzają się w punkcie β , możemy te funkcje połączyć w jedną funkcję, określoną w całym przedziale $[\alpha, \beta_1]$ i spełniającą w nim równanie (17.2).

Funkcję tę możemy przedłużyć dalej w ten sam sposób na przedział $[\alpha, \beta_2]$, gdzie $\beta_2 = \gamma + 4(\beta - \gamma)$, i tak dalej aż do nieskończoności. Podobnie można ją przedłużyć na lewo aż do $-\infty$.

Udowodniliśmy więc, że przedłużenie jest wykonalne w każdym przypadku.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że twierdzenie o jednoznaczności, udowodnione w poprzednim paragrafie dla przedziału nieskończonego, jest również ważne dla przedziału skończonego.

ROZDZIAŁ V

Drgania struny

§ 18. Równanie operatorowe struny drgającej

Przypuśćmy, że struna o długości λ_0 jest rozpięta wzdłuż osi λ od punktu 0 do λ_0 . Funkcja $x(\lambda, t)$ oznaczająca wychylenie punktu struny o odciętej λ w chwili t spełnia równanie różniczkowe cząstkowe

$$(18.1) \quad x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_{tt}(\lambda, t)$$

gdzie $a = \sqrt{\frac{\mu}{P}}$; P jest naprężeniem struny, μ zaś masą przypadającą na jednostkę długości. Przy wyprowadzaniu tego równania zakłada się, że struna jest doskonale giętka i że wahania jej są na tyle małe, że nie zmieniają naprężenia P , które przyjmujemy za stałe.

Założmy, że w chwili $t=0$ struna pokrywa się z osią λ i że cząstki jej nie mają żadnej prędkości; odpowiada to założeniu

$$(18.2) \quad x(\lambda, 0) = 0 \quad \text{i} \quad x_t(\lambda, 0) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

Przypuśćmy dalej, że początek struny porusza się w kierunku prostopadłym do osi λ i ruch jego jest określony przez funkcję $v(t)$; przypuśćmy ponadto, że koniec struny jest umocowany nieruchomo. Odpowiada to założeniom

$$(18.3) \quad x(0, t) = v(t) \quad \text{i} \quad x(\lambda_0, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Wyznamy ruch pozostałych cząstek struny i pokażemy, że ruch ten jest określony jednoznacznie przez podane warunki. Mówiąc językiem matematycznym, rozwiążemy równanie cząstkowe (18.1) przy zadanych warunkach (18.2) i (18.3) i pokażemy, że znalezione rozwiązanie jest jedyne.

Wobec założenia (18.2) operatorową postacią równania (18.1) jest

$$(18.1') \quad x''(\lambda) = a^2 s^2 x(\lambda) \quad (a > 0),$$

gdzie $x(\lambda) = \{x(\lambda, t)\}$; warunki (18.2) są już zawarte w równaniu (18.1'). Natomiast warunki (18.3) mają teraz postać

$$(18.3') \quad x(0) = v \quad \text{i} \quad x(\lambda_0) = 0,$$

gdzie $v = \{v(t)\}$.

Znajdźmy najpierw funkcje wykładnicze $e^{\lambda w}$, spełniające równanie (18.1'), to znaczy takie, że

$$(e^{\lambda w})'' = \alpha^2 s^2 e^{\lambda w}.$$

Po wykonaniu różniczkowania mamy

$$w^2 e^{\lambda w} = \alpha^2 s^2 e^{\lambda w}$$

i po podzieleniu przez $e^{\lambda w}$ (funkcja wykładnicza jest wszędzie różna od zera)

$$w^2 = \alpha^2 s^2.$$

Stąd $w = -\alpha s$ lub $w = \alpha s$. Istnieją więc dwie (i tylko dwie) funkcje wykładnicze

$$e^{-\alpha \lambda s} \quad \text{i} \quad e^{\alpha \lambda s}$$

spełniające równanie (18.1').

Łatwo sprawdzić, że każda funkcja operatorowa kształtu

$$(18.4) \quad x(\lambda) = c_1 e^{-\alpha \lambda s} + c_2 e^{\alpha \lambda s}$$

spełnia równanie (18.1'), jakkolwiek ustalimy operatory c_1 i c_2 . Dobierzmy te operatory w ten sposób, żeby były spełnione warunki (18.3'), to znaczy żeby

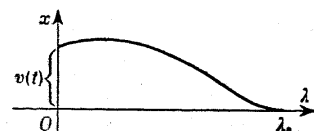
$$(18.5) \quad \begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = v, \\ x(\lambda_0) &= c_1 e^{-\alpha \lambda_0 s} + c_2 e^{\alpha \lambda_0 s} = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdujemy

$$c_1 = \frac{v}{1 - e^{-2\alpha \lambda_0 s}} \quad \text{i} \quad c_2 = -\frac{e^{-2\alpha \lambda_0 s} v}{1 - e^{-2\alpha \lambda_0 s}}.$$

Stąd mamy szukane rozwiązanie

$$(18.6) \quad x(\lambda) = \frac{(e^{-\alpha \lambda s} - e^{-\alpha (2\lambda_0 - \lambda)s}) v}{1 - e^{-2\alpha \lambda_0 s}} \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$



Rys. 98.
Kształt struny w chwili t .

Znając własności operatora przesunięcia, można by to rozwiązanie napisać, używając symbolów klasycznej analizy; jednakże uzyskane tą drogą wzory są dość skomplikowane, tak że w dyskusji najlepiej posługiwać się bezpośrednio rozwiązaniem operatorowym, które jest bardziej przejrzyste.

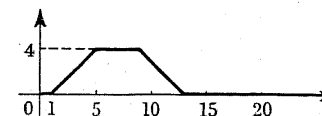
Przedyskutujmy dla przykładu rozwiązanie (18.6) przy założeniu, że

$$(18.7) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}, \quad \lambda_0 = 10, \\ v &= \begin{cases} t & \text{dla } 0 \leq t < 4 \\ 4 & \text{dla } 4 \leq t < \infty \end{cases}. \end{aligned}$$

Podstawiając za λ różne wartości, możemy łatwo zanalizować ruch poszczególnych cząstek struny. Na przykład dla $\lambda = 2$ mamy

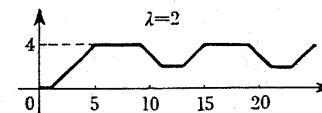
$$(18.8) \quad x(2) = \frac{(e^{-s} - e^{-9s})v}{1 - e^{-10s}}.$$

Dla operatora $(e^{-s} - e^{-9s})v$ mamy wykres następujący



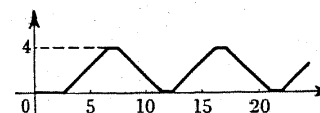
Rys. 99.

a stąd przez nałożenie fal przesuniętych o 10, 20, 30, ... jednostek znajdujemy wykres dla $x(2)$:

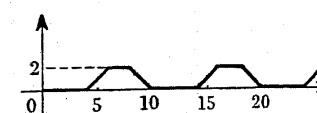


Rys. 100.

Wykres ten przedstawia ruch cząstki struny o współrzędnej 2. Na rysunkach 101 i 102 podajemy jeszcze wykresy dla punktów $\lambda = 5$ i $\lambda = 8$, które można znaleźć w podobny sposób.



Rys. 101.



Rys. 102.

Ciekawy jest fakt, że w omówionym przykładzie struna porusza się w taki sposób, że funkcja $x(\lambda, t)$ wcale nie spełnia równania cząstkowego (18.1). Nie spełnia go z tej prostej przyczyny, że ruch cząstek struny określony jest liniami łamanymi, wskutek czego funkcja $x(\lambda, t)$ nie wszędzie ma pochodne (nawet pierwszego rzędu).

Można by powiedzieć, że w rzeczywistości struna nigdy ostro się nie załamuje i zawsze można traktować $x(\lambda, t)$ jako funkcję z drugimi pochodnymi ciągłymi, a rysunki 98-101 są tylko przybliżeniem i pewnym uproszczeniem.

Jednak tego rodzaju załamania w praktyce często leżą w granicach błędu pomiaru; wskutek tego nie opłaca się brać zbyt daleko idących szczegółów, zwłaszcza że wprowadzenie ich do rachunku ogromnie skomplikowałoby jego wykonanie oraz ostateczny wynik, który przy tym wcale nie byłby dokładniejszy. W takich warunkach zależy nawet na tym, żeby w rachunku pominąć drobne zaburzenia, które nie są istotne dla scharakteryzowania całości zjawiska.

Nasz rachunek był właśnie w ten sposób przeprowadzony i jest matematycznie zupełnie poprawny, o ile równanie operatorowe (18.1') traktujemy jako podstawowe równanie struny drgającej.

Rozwiązania tego równania są jednocześnie rozwiązaniami równania cząstkowego (18.1), ale tylko wówczas, gdy mają drugie pochodne cząstkowe ciągłe. Równania cząstkowego nie możemy więc uważać za ogólne równanie struny drgającej, chyba że nie będziemy wcale troszczyć się o poprawność przeprowadzonych rachunków lub ograniczymy się do klasy funkcji, mających drugie pochodne cząstkowe ciągłe, co znowu jest niewystarczające w zastosowaniach. Poprawność rachunku w zakresie operatorów pochodzi stąd, że wszystkie rozważane funkcje są różniczkowalne w sensie operatorowym (nawet dowolną liczbę razy).

Według klasyfikacji przyjętej w teorii równań cząstkowych równanie (18.1) należy do typu *hiperbolicznego*. Z tego też powodu funkcję operatorową $e^{-\lambda s}$, będącą w ścisłym związku z tym równaniem, nazwaliśmy *funkcją wykładniczą hiperboliczną* (zob. § 9).

§ 19. Kształt struny drgającej

Rysunki 97-101 nie przedstawiają kształtu struny, lecz wykres ruchu poszczególnych jej cząstek. Interesujące jest również zbadanie kształtu samej struny w dowolnie ustalonej chwili t_0 .

Rozwińmy w tym celu rozwiązanie (18.6) (przy założeniu (18.7)) na szereg nieskończony

$$x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-(10n + \frac{1}{2}\lambda)s} - e^{-(10n + 10 - \frac{1}{2}\lambda)s} \right) v.$$

Przypuśćmy, że chcemy zbadać kształt struny w pewnej chwili $t_0 < 10$. Wtedy te wyrazy szeregu, w których współczynnik przy s jest większy od 10, nie grają roli, gdyż przedstawiają funkcje równe zero w przedziale $0 \leq t < 10$. Możemy więc zamiast $x(\lambda)$ badać funkcję

$$\left(e^{-\frac{1}{2}\lambda s} - e^{-(10 - \frac{1}{2}\lambda)s} \right) v.$$

Zbadajmy osobno funkcje

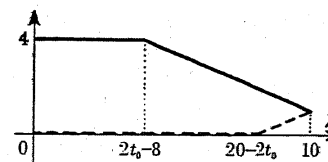
$$x_1(\lambda) = \{x_1(\lambda, t)\} = e^{-\frac{1}{2}\lambda s} v \quad \text{ i } \quad x_2(\lambda) = \{x_2(\lambda, t)\} = e^{-(10 - \frac{1}{2}\lambda)s} v;$$

wobec równości (18.7) i własności operatora przesunięcia jest

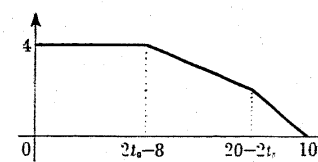
$$x_1(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \frac{1}{2}\lambda, \\ t - \frac{1}{2}\lambda & \text{dla } \frac{1}{2}\lambda \leq t < \frac{1}{2}\lambda + 4, \\ 4 & \text{dla } \frac{1}{2}\lambda + 4 \leq t; \end{cases}$$

$$x_2(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < 10 - \frac{1}{2}\lambda, \\ t - 10 + \frac{1}{2}\lambda & \text{dla } 10 - \frac{1}{2}\lambda \leq t < 14 - \frac{1}{2}\lambda, \\ 4 & \text{dla } 14 - \frac{1}{2}\lambda \leq t. \end{cases}$$

Ustalając dowolnie $t = t_0$, znajdujemy stąd wykresy dla funkcji $x_1(\lambda, t_0)$ i $x_2(\lambda, t_0)$; wykres funkcji x_1 przedstawiony jest na rysunku 103 przez linię ciągłą, a wykres funkcji x_2 przez linię kreskowaną.



Rys. 103.



Rys. 104.

Odejmując graficznie linię kreskowaną od ciągłej znajdujemy kształt struny w chwili t_0 (rysunek 104).

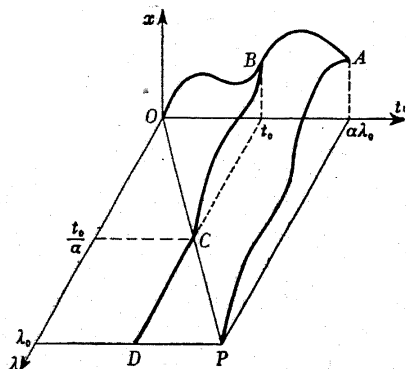
Można podać czysto graficzny sposób znalezienia kształtu struny w chwili t , gdy dany jest wykres funkcji v . Dla wyprowadzenia tego sposobu napiszmy rozwiązanie ogólne (18.6) w postaci szeregu nieskończonego

$$(19.1) \quad x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-(2n\alpha\lambda_0 + \alpha\lambda)s} - e^{-[2(n+1)\alpha\lambda_0 - \alpha\lambda]s} \right) v.$$

Gdy $0 \leq t < \alpha\lambda_0$, to wystarczy wziąć pod uwagę tylko jeden wyraz szeregu, mianowicie

$$(19.2) \quad e^{-\alpha\lambda s} v = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \alpha\lambda \\ v(t - \alpha\lambda) & \text{dla } \alpha\lambda \leq t \end{cases};$$

odpowiada jemu powierzchnia przedstawiona na rysunku 105.

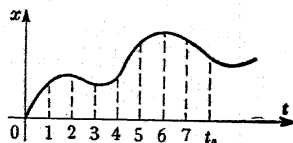


Rys. 105.

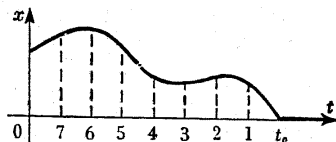
Powstaje ona przez wodzenie prostej równoległej do OP wzdłuż krzywej OBA , przedstawiającej wykres funkcji $x=v(t)$. Chcąc mieć kształt struny w chwili t_0 , wystarczy przeciąć powierzchnię płaszczyzną prostopadłą do osi t i przechodzącą przez punkt t_0 ; kształt struny przedstawiony jest przez krzywą przecięcia BCD .

Wynika stąd prosta konstrukcja płaska, którą ilustrują rysunki 106 a i 106 b. Gruba linia na rysunku 106 a wy-

braza ruch początkowego punktu struny, gruba zaś linia na rysunku 106 b wyobraża kształt struny w chwili t_0 . Konstrukcja nie wymaga wyjaśnienia.



Rys. 106 a.



Rys. 106 b.

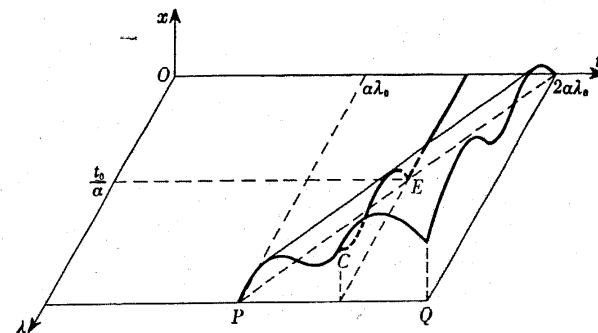
Z powyższej konstrukcji widać, że z biegiem czasu t krzywa OA' przesuwa się jak fala w prawo z prędkością $1/a$. W chwili $t=\alpha\lambda_0$ czoło fali dochodzi do końca struny $\lambda=\lambda_0$, gdzie następuje odbicie fali. Przy konstrukcji odbicie wymaga uwzględnienia drugiego wyrazu szeregu (19.1)

$$-e^{-\alpha(2\lambda_0 - \lambda)s} v.$$

Operatorowi

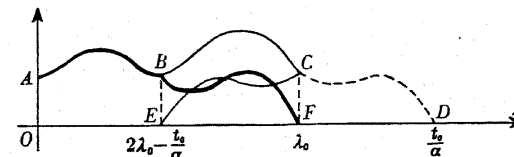
$$(19.3) \quad e^{-\alpha(2\lambda_0 - \lambda)s} v = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \alpha(2\lambda_0 - \lambda) \\ v(t - 2\alpha\lambda_0 + \alpha\lambda) & \text{dla } \alpha(2\lambda_0 - \lambda) \leq t \end{cases}$$

odpowiada powierzchnia przedstawiona na rysunku 107.



Rys. 107.

Chcąc mieć kształt struny w chwili t , znajdujemy najpierw w poprzednio podany sposób kształt krzywej, odpowiadającej ope-



Rys. 108.

ratorowi (19.2). Jest to więc krzywa $A'O$ z rysunku 106 przesunięta w prawo aż do punktu $\frac{t_0}{\alpha}$, który przy obecnym założeniu leży na

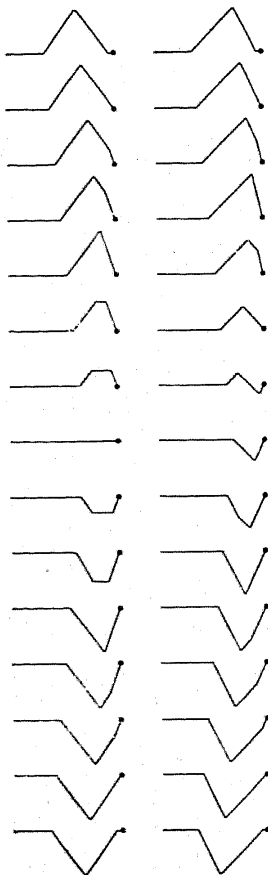
prawo od punktu λ_0 ; po przesunięciu jej będziemy mieli krzywą $ABCD$ podaną na rysunku 108 (do wykreślenia jej musimy oczywiście znać przebieg funkcji v dla wartości t większych od $a\lambda_0$). Od jej części ABC odpowiadającej przedziałowi $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ musimy odjąć jeszcze łuk oznaczony literami t_0EC na rysunku 107. Łuk ten przeniesiony na rysunek 108 jest oznaczony literami OEC ; jest on odbiciem symetrycznym łuku CD względem prostej CF .

Definitywny kształt struny jest przedstawiony na rysunku 108 przez grubą linię ABF .

Załamane tej linii w punkcie B pochodzi od odbicia się fali i przesuwania się w lewo z prędkością $\frac{1}{a}$; w chwili $2a\lambda_0$ załamanie osiąga punkt początkowy struny i wtedy następuje ponowne odbicie się fali. Do głosu dochodzi wówczas trzeci z kolei wyraz szeregu (19.1), a kształt struny w późniejszej chwili można znaleźć przez odpowiednią kombinację trzech łuków.

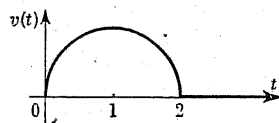
Stosując graficzną metodę badania, można łatwo przestudiować sposób odbijania się fali przy zadanym z góry jej profilu. Na podanych obok rysunkach przedstawione jest sposobem kinematograficznym odbicie się prostej fali symetrycznej i asymetrycznej.

Ćwiczenie. Przestudiować metodą graficzną odbicie się fali w przypadku $a = 1$, gdy wykres funkcji v ma kształt podany na rysunku 111.



Rys. 109.
Odbicie się fali symetrycznej.

Rys. 110.
Odbicie się fali asymetrycznej.



Rys. 111.

§ 20. Ogólniejsze warunki brzegowe

Zbadajmy jeszcze ruch struny w przypadku, gdy na obydwu końcach nadajemy jej dowolny ruch, określony funkcjami $v_1 = \{v_1(t)\}$ i $v_2 = \{v_2(t)\}$. Jeżeli długość struny jest λ_0 , odpowiada to założeniu

$$(20.1) \quad x(0) = v_1, \quad x(\lambda_0) = v_2.$$

Zakładamy ponadto, że w chwili $t=0$ struna jest rozciągnięta w spoczynku wzdłuż osi λ . Mamy wówczas do rozwiązania to samo równanie co poprzednio

$$(20.2) \quad x''(\lambda) = a^2 s^2 x(\lambda),$$

jedynie warunki brzegowe (20.1) są ogólniejsze.

Łatwo dobrać stałe c_1 i c_2 we wzorze (18.4) tak, żeby warunki (20.1) były spełnione. Wystarczy w tym celu rozwiązać układ równań

$$(20.3) \quad \begin{aligned} c_1 + c_2 &= v_1, \\ c_1 e^{-a\lambda_0 s} + c_2 e^{a\lambda_0 s} &= v_2; \end{aligned}$$

znajdujemy w ten sposób

$$(20.4) \quad c_1 = \frac{v_1 - e^{-a\lambda_0 s} v_2}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}, \quad c_2 = \frac{-e^{-2a\lambda_0 s} v_1 + e^{-a\lambda_0 s} v_2}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}$$

i stąd

$$(20.5) \quad x(\lambda) = \frac{(e^{-a\lambda s} - e^{-a(2\lambda_0 - \lambda)s})v_1 + (e^{-a(\lambda_0 - \lambda)s} - e^{-(\lambda_0 + \lambda)s})v_2}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $v_2 = 0$, wzór ten upraszcza się do postaci (18.6).

Abstrahując od sensu fizycznego, funkcja (20.5) jest zawsze rozwiązaniem równania (20.2), bez względu na to jakie operatory przyjmiemy za v_1 i v_2 .

Jeżeli v_1 i v_2 są funkcjami klasy \mathcal{K} , to współczynniki c_1 i c_2 , określone wzorami (20.4), są również funkcjami klasy \mathcal{K} .

Istotnie, funkcja klasy \mathcal{K} pomnożona przez operator przesunięcia pozostaje nadal funkcją klasy \mathcal{K} . Ponieważ suma i różnica funkcji klasy \mathcal{K} jest znowu funkcją klasy \mathcal{K} , więc liczniki wyrażeń (20.4) są funkcjami klasy \mathcal{K} przy każdym ustalonym $\lambda_0 > 0$. Liczniki te są dzielone przez mianownik $1 - e^{-2a\lambda_0 s}$ lub, co na jedno wychodzi, mnożone przez szereg

$$1 + e^{-2a\lambda_0 s} + e^{-4a\lambda_0 s} + \dots;$$

w wyniku daje to znowu funkcje klasy \mathcal{K} .

W zupełnie podobny sposób można udowodnić twierdzenie:

Jeżeli v_1 i v_2 są funkcjami klasy \mathcal{C} , równymi zeru w punkcie $t=0$, to współczynniki (20.4) są również funkcjami klasy \mathcal{C} równymi zeru w punkcie $t=0$.

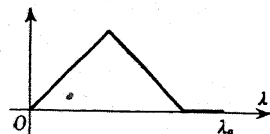
Funkcję $x(\lambda)$ spełniającą równanie (20.2) i warunki (20.1) można zawsze przedstawić jako sumę

$$x(\lambda) = x_1(\lambda) + x_2(\lambda),$$

gdzie $x_1(\lambda)$ i $x_2(\lambda)$ spełniają to samo równanie (20.2) i warunki

$$\begin{aligned} x_1(0) &= v_1, & x_1(\lambda_0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, & x_2(\lambda_0) &= v_1. \end{aligned}$$

Funkcja $x_1(\lambda)$ przedstawia ruch struny, gdy jej koniec jest nieruchomy, funkcja zaś $x_2(\lambda)$ przedstawia ruch struny, której początek jest nieruchomy. Kształt struny w obydwu przypadkach można znaleźć przy pomocy konstrukcji, podanej w poprzednim paragrafie (oczywiście z odpowiednią orientacją rysunków). Przez proste złożenie wykresów można znaleźć kształt struny, gdy obydwa końce są ruchome.



Rys. 112.

Ćwiczenie. Znaleźć metodą graficzną kształt struny w chwili $t = \frac{a\lambda_0}{2}$, przyjmując, że w chwili $t=0$ struna spoczywa nieruchomo na osi λ , końcom jej zaś nadajemy jednocześnie ten sam ruch, którego wykres podany jest na rysunku 112.]

§ 21. Jednoznaczność rozwiązania

Udowodnimy, że każda funkcja operatorowa $y(\lambda)$, spełniająca równanie (18.1'), jest postaci (18.4). Istotnie, funkcja ta spełnia w punkcie $\lambda=0$ jakieś warunki początkowe

$$y(0) = k_0 \quad \text{i} \quad y'(0) = k_1.$$

Ale we wzorze (18.4) można zawsze tak dobrać współczynniki c_1 i c_2 , żeby było

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = k_0, \\ x'(0) &= -c_1 as + c_2 as = k_1, \end{aligned}$$

gdyż wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -as & as \end{vmatrix} = 2as$$

jest różny od zera. Przy tak dobranych wartościach c_1 i c_2 jest na podstawie uwagi końcowej z paragrafu 17 $y(\lambda) = x(\lambda)$ dla wszystkich λ z rozważanego przedziału.

Wyrażenie (18.4) będziemy nazywali *rozwiązaniem ogólnym* równania (18.1'); występują w nim dwie stałe dowolne c_1 i c_2 .

Łatwo teraz udowodnić, że *warunki (18.3') lub ogólniej warunki (20.1) określają rozwiązanie równania (18.1') w sposób jednoznaczny*. Istotnie, rozwiązanie musi mieć postać (18.4); z drugiej strony wobec warunków (20.1) muszą być spełnione równości (20.3), które określają stałe c_1 i c_2 jednoznacznie, gdyż

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-a\lambda_0 s} & e^{a\lambda_0 s} \end{vmatrix} = e^{a\lambda_0 s} - e^{-a\lambda_0 s} \neq 0.$$

W ten sposób jednoznaczność rozwiązań jest udowodniona.

W szczególności wynika stąd również, że o ile istnieje funkcja spełniająca równanie cząstkowe (18.1) i warunki (18.2) i (18.3), lub ogólniej warunki (18.2) i

$$x(0, t) = v_1(t) \quad \text{i} \quad x(\lambda_0, t) = v_2(t) \quad (0 \leq t < \infty),$$

to jest ona jedyna.

§ 22. Nieskończenie długa struna

Struna taka nie istnieje w rzeczywistości, jest to tylko pewien sposób wyrażania się. Chodzi o rzecz następującą.

Przypuśćmy, że w warunkach omówionych w § 18 obserwujemy strunę w czasie $0 \leq t < a\lambda_0$. Pisząc rozwiązanie (18.6) w postaci

$$(22.1) \quad \tilde{x}(\lambda) = e^{-a\lambda s} v + b(\lambda),$$

gdzie

$$b(\lambda) = e^{-a\lambda_0 s} \frac{(e^{-a(\lambda_0 + \lambda)s} - e^{-a(\lambda_0 - \lambda)s})v}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}},$$

widzimy, że funkcja $b(\lambda) = \{b(\lambda, t)\}$ równa się zeru dla $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ i $0 \leq t < a\lambda_0$. Wskutek tego wyraz $b(\lambda)$ we wzorze (22.1) można pominąć, ograniczając się do badania funkcji

$$(22.2) \quad x(\lambda) = e^{-a\lambda s} v.$$

Jest wtedy

$$x(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < a\lambda, \\ v(t - a\lambda) & \text{dla } 0 \leq a\lambda < t. \end{cases}$$

Widać, że czoło fali posuwającej się od początkowego punktu struny, w chwili t znajduje się w punkcie $\lambda = t/a$; fala posuwa się z prędkością $1/a = \sqrt{P/\mu}$. Prędkość fali jest proporcjonalna do drugiego pierwiastka z naprężenia struny i odwrotnie proporcjonalna do drugiego pierwiastka z liniowej gęstości struny.

Gdy struna jest bardzo długa, to rozwiązanie (21.2) przyjmujemy jako równanie jej ruchu i mówimy, co nie jest całkiem poprawne, że *struna jest nieskończenie długa*.

Znajdźmy teraz rozwiązanie $x(\lambda)$ równania

$$x''(\lambda) = a^2 s^2 x(\lambda),$$

które by w przedziale *nieskończonym* $0 \leq \lambda < \infty$ było funkcją parametryczną, żądając ponadto, żeby

$$(22.3) \quad x(0) = q.$$

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda s} + c_2 e^{a\lambda s}.$$

Jeżeli $x(\lambda)$ ma być funkcją parametryczną, to jej wartość w punkcie 0 i w dowolnie ustalonym punkcie λ_0 musi być funkcją klasy \mathcal{K} ; wobec tego współczynniki c_1 i c_2 muszą być również funkcjami klasy \mathcal{K} (zob. § 20). Stąd wynika, że $c_2 = 0$, w przeciwnym bowiem razie przy dużych wartościach λ składnik $c_2 e^{a\lambda s}$ przestawałby być funkcją klasy \mathcal{K} i $x(\lambda)$ nie byłaby funkcją parametryczną.

Stąd wynika, że nasze rozwiązanie redukuje się do postaci (22.2); ponieważ z warunku (22.3) wynika, że $c_1 = v$, więc szukanym rozwiązaniem jest funkcja (22.2).

Dla struny nieskończonej można więc rozwiązywać równanie od razu w przedziale nieskończonym; rachunki są w ten sposób krótsze, a wynik otrzymujemy ten sam.

Interpretując to z punktu widzenia równań różniczkowych cząstkowych, widzimy, że jedyną funkcją spełniającą równanie

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_{tt}(\lambda, t)$$

w obszarze $0 \leq \lambda < \infty$, $0 \leq t < \infty$ z warunkami

$$(22.4) \quad \begin{aligned} x(\lambda, 0) &= x_t(\lambda, 0) = 0 & (0 \leq \lambda < \infty), \\ x(0, t) &= v(t) & (0 \leq t < \infty), \end{aligned}$$

jest funkcja

$$x(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < a\lambda, \\ v(t - a\lambda) & \text{dla } 0 \leq a\lambda < t. \end{cases}$$

W niektórych podręcznikach rachunku operatorów oprócz warunków (22.4) podawany jest jeszcze warunek

$$(22.5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x(\lambda, t) = 0.$$

Jak z powyższej dyskusji widać, warunek ten jest zupełnie zbędny¹⁾. Jest to intuicyjnie zrozumiałe, gdyż prędkość fali jest skończona, żadne więc zaburzenie w nieskończoności nie może do nas dojść po skończonym czasie.

§ 23. Struna w polu grawitacyjnym

Dotychczas zajmowaliśmy się ruchem struny przy założeniu, że nie działa na nią żadna siła zewnętrzna. Przypuśćmy teraz, że struna jest rozciągnięta w polu grawitacyjnym działającym prostopadle do niej. Wtedy równanie różniczkowe cząstkowe będzie miało postać

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 [x_{tt}(\lambda, t) + g],$$

gdzie g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Przyjmując, że w chwili $t=0$ struna leży nieruchomo na osi λ , możemy napisać

$$(23.1) \quad x(\lambda, 0) = x_t(\lambda, 0) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

Założmy jeszcze, że końce struny są unieruchomione, to znaczy, że

$$(23.2) \quad x(0, t) = x(\lambda_0, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

gdzie λ_0 jest długością struny.

Wobec warunków (23.1) równanie operatorowe będzie miało postać

$$(23.3) \quad x''(\lambda) = a^2 s^2 x(\lambda) + a^2 g;$$

warunkom zaś (23.2) odpowiadają warunki

$$(23.4) \quad x(0) = x(\lambda_0) = 0.$$

¹⁾ Podręczniki te stosują metodę transformacji Laplace'a; warto zauważyć, że przy tej metodzie nawet wprowadzenie warunku (22.5) nie daje możliwości udowodnienia, że otrzymane rozwiązanie jest jedyne.

Łatwo zauważyć, że równanie (23.3) jest spełnione przez funkcję operatorową stałą

$$x_0(\lambda) = -a^2 g l^3;$$

funkcja ta nie spełnia jednak warunków (23.4). Przypuśćmy, że istnieje funkcja $x(\lambda)$ spełniająca równanie (23.3) i warunki (23.4). Wtedy różnica

$$y(\lambda) = x(\lambda) - x_0(\lambda)$$

spełnia równanie jednorodne

$$y''(\lambda) = a^2 s^2 y(\lambda).$$

Stąd wynika, że $y(\lambda)$ jest postaci

$$y(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda s} + c_2 e^{a\lambda s},$$

czyli że

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda s} + c_2 e^{a\lambda s} - a^2 g l^3;$$

operatory c_1 i c_2 wyznaczamy tak, żeby warunki (23.4) były spełnione

$$c_1 + c_2 - a^2 g l^3 = 0,$$

$$c_1 e^{-a\lambda_0 s} + c_2 e^{a\lambda_0 s} - a^2 g l^3 = 0.$$

Stąd mamy

$$c_1 = \frac{(1 - e^{-a\lambda_0 s}) a^2 g l^3}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{(e^{-a\lambda_0 s} - e^{-2a\lambda_0 s}) a^2 g l^3}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}$$

i ostatecznie

$$x(\lambda) = a^2 g \frac{(-1 + e^{-2a\lambda_0 s} + e^{-a\lambda s} - e^{-a(\lambda_0 + \lambda)s} + e^{-a(2\lambda_0 - \lambda)s} - e^{-a(1\lambda_0 - \lambda)s}) l^3}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}.$$

Łatwo sprawdzić, że wyrażenie w liczniku przedstawia funkcję parametryczną, która jest równa zero dla $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ i $2a\lambda_0 < t$. Stąd wniosek (zob. § 15), że funkcja $x(\lambda, t)$ jest periodyczna względem t przy każdym ustalonym $0 < \lambda < \lambda_0$. Struna drga, wracając do swego położenia w odstępach czasu $2a\lambda_0$.

Zbadajmy kształt struny w ustalonej chwili $t \leq a\lambda_0$.

W tym celu wyrażenie na $x(\lambda)$ rozwijamy w szereg, zastępując w nim czynnik $\frac{1}{1 - e^{-2a\lambda_0 s}}$ przez $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na\lambda_0 s}$ i wykonując mnożenie. Z szeregu tego wystarczy wziąć tylko te wyrazy, w których

wykładniki współczynników przy s są bezwzględnie mniejsze od $a\lambda_0$. Ograniczamy się więc do badania wyrażenia

$$\{y(\lambda, t)\} = (-1 + e^{-a\lambda s} + e^{-a(\lambda_0 - \lambda)s}) a^2 g l^3.$$

Dla $0 \leq t \leq \frac{1}{2} a\lambda_0$ mamy

$$y(\lambda, t) = \begin{cases} \frac{a^2 g}{2} [-t^2 + (t - a\lambda)^2 + 0] & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq \frac{t}{a}, \\ \frac{a^2 g}{2} (-t^2 + 0 + 0) & \text{dla } \frac{t}{a} \leq \lambda \leq \lambda_0 - \frac{t}{a}, \\ \frac{a^2 g}{2} [-t^2 + 0 + (t - a\lambda_0 + a\lambda)^2] & \text{dla } \lambda_0 - \frac{t}{a} \leq \lambda \leq \lambda_0, \end{cases}$$

a dla $\frac{1}{2} a\lambda_0 \leq t \leq a\lambda_0$

$$y(\lambda, t) = \begin{cases} \frac{a^2 g}{2} [-t^2 + (t - a\lambda)^2 + 0] & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0 - \frac{t}{a}, \\ \frac{a^2 g}{2} [-t^2 + (t - a\lambda)^2 + (t - a\lambda_0 + a\lambda)^2] & \text{dla } \lambda_0 - \frac{t}{a} \leq \lambda \leq \frac{t}{a}, \\ \frac{a^2 g}{2} [-t^2 + 0 + (t - a\lambda)^2] & \text{dla } \frac{t}{a} \leq \lambda \leq \lambda_0. \end{cases}$$

W szczególności jest

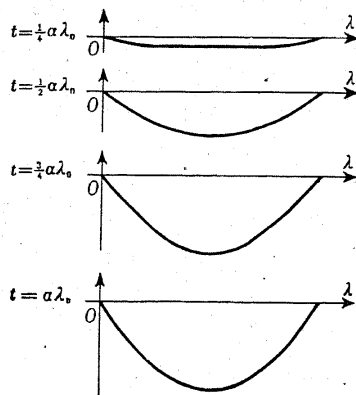
$$y(\lambda, \frac{1}{2} a\lambda_0) = \begin{cases} -\frac{a^4 g}{4} \lambda(\lambda_0 - 2\lambda) & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \lambda_0, \\ -\frac{a^4 g}{32} \lambda_0^2 & \text{dla } \frac{1}{2} \lambda_0 \leq \lambda \leq \frac{3}{2} \lambda_0, \\ -\frac{a^4 g}{4} (\lambda_0 - \lambda)(2\lambda - \lambda_0) & \text{dla } \frac{3}{2} \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0; \end{cases}$$

$$y(\lambda, \frac{1}{2} a\lambda_0) = -\frac{a^4 g}{2} \lambda(\lambda_0 - \lambda) \quad \text{dla } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0;$$

$$y(\lambda, \frac{3}{2} a\lambda_0) = \begin{cases} -\frac{a^4 g}{4} \lambda(3\lambda_0 - 2\lambda) & \text{dla } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \lambda_0, \\ [-\frac{7}{32} \lambda_0^2 + (\lambda - \frac{1}{2} \lambda_0)^2] a^4 g & \text{dla } \frac{1}{2} \lambda_0 \leq \lambda \leq \frac{3}{2} \lambda_0, \\ -\frac{a^4 g}{4} (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 + 2\lambda) & \text{dla } \frac{3}{2} \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0; \end{cases}$$

$$y(\lambda, a\lambda_0) = -a^4 g \lambda(\lambda_0 - \lambda) \quad \text{dla } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0.$$

Korzystając z tych wzorów łatwo już narysować kształt struny w chwilach $t = \frac{1}{4}a\lambda_0$, $\frac{1}{2}a\lambda_0$, $\frac{3}{4}a\lambda_0$ i $a\lambda_0$ (rysunek 113). Interesujące jest,



Rys. 113.

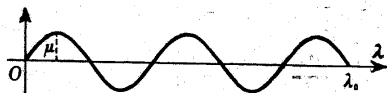
że w chwilach $t = \frac{1}{2}a\lambda_0$ i $t = a\lambda_0$ struna układa się wzdłuż łuku paraboli. Natomiast w chwili $t = \frac{1}{4}a\lambda_0$ część środkowa struny jest zupełnie prosta, w chwili zaś $t = \frac{3}{4}a\lambda_0$ silniej uwypuklona ku dołowi.

§ 24. Drgania struny przy pewnych szczególnych położeniach początkowych

Przypuścimy, że struna jest umocowana nieruchomo w punktach $\lambda = 0$ i $\lambda = \lambda_0$ i że kształt jej w chwili $t = 0$ dany jest przez funkcję

$$(24.1) \quad x(\lambda, 0) = \mu \sin \frac{k\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0),$$

gdzie μ jest liczbą dodatnią, k zaś liczbą naturalną (rysunek 114).

Rys. 114. Kształt struny w chwili $t = 0$ ($k = 5$).

Zakładamy, że cząstki struny nie mają w chwili $t = 0$ żadnej prędkości, to znaczy, że

$$(24.2) \quad x_t(\lambda, 0) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

Założeniu, że końce struny są umocowane nieruchomo, odpowiadają warunki

$$(24.3) \quad x(0, t) = 0 \quad \text{i} \quad x(\lambda_0, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Zakładamy wreszcie, że na strunę nie działa siła grawitacji ani żadna inna siła zewnętrzna. Równanie różniczkowe cząstkowe struny ma więc postać

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_{tt}(\lambda, t).$$

Wobec (24.1) i (24.2) mamy

$$\{x_{tt}(\lambda, t)\} = s^2 \{x(\lambda, t)\} - s\mu \sin \frac{k\pi\lambda}{\lambda_0};$$

zatem równanie operatorowe ma kształt

$$(24.4) \quad x''(\lambda) - a^2 s^2 x(\lambda) = -a^2 \mu s \sin \frac{k\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0),$$

warunki zaś (24.3) zapisujemy w postaci

$$(24.5) \quad x(0) = 0 \quad \text{i} \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Zbadamy, czy operator c da się wyznaczyć w taki sposób, żeby funkcja

$$(24.6) \quad x(\lambda) = c \sin \frac{k\pi\lambda}{\lambda_0},$$

mająca kształt podobny jak prawa strona równania (24.4), była rozwiązaniem tego równania. Podstawiając (24.6) do (24.4) znajdujemy po uproszczeniu przez $-\sin \frac{k\pi\lambda}{\lambda_0}$

$$c \frac{k^2 \pi^2}{\lambda_0^2} + c a^2 s^2 = a^2 \mu s,$$

skąd

$$c = \frac{\mu s}{s^2 + \frac{k^2 \pi^2}{a^2 \lambda_0^2}} = \left\{ \mu \cos \frac{k\pi t}{a\lambda_0} \right\}.$$

Przy tak wyznaczonym współczynniku c funkcja (24.6) spełnia równanie (24.4); ale widać, że spełnia ona również warunki (24.5). Zatem ruch struny określony jest wzorem

$$x(\lambda, t) = \mu \cos \frac{k\pi t}{a\lambda_0} \sin \frac{k\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0, \quad 0 \leq t < \infty).$$

Widać stąd, że struna ma stale kształt sinusoidy, zmienia się natomiast amplituda. W chwili $t = \frac{(1+2n)\alpha\lambda_0}{2k}$ ($n=0, 1, \dots$) amplituda jest równa zeru i struna rozprostowuje się zupełnie. Częstość drgania wynosi

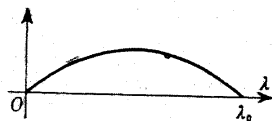
$$n = \frac{k}{2\alpha\lambda_0}.$$

Dla $\lambda = \frac{\lambda_0}{k}, \dots, \frac{(k-1)\lambda_0}{k}$ jest stale $x(\lambda, t) = 0$; w punktach tych, zwanych *węzłami*, struna jest stale nieruchoma. Liczba węzłów wynosi $k-1$; im jest większa, tym wyższa jest częstość drgania.

Warunki naszego zadania mogą być w przybliżeniu zrealizowane w instrumentach muzycznych, posiadających struny. Naprężenie strun jest tam na tyle wysokie, że siła ciężkości nie gra przy nim większej roli. Przez przytrzymywanie struny palcem w odpowiednim miejscu można wywołać powstanie węzłów, przez co struna wydaje ton znacznie wyższy niż normalnie. Są to tak zwane tony *flażoletowe*. W rzeczywistości nigdy nie uda się uzyskać zupełnego unieruchomienia struny w węzłach, przez co powstają dodatkowe niższe tony harmoniczne, nadające flażoletom odcień bardzo miękki i miły dla ucha.

Rozwiążmy jeszcze to samo zagadnienie struny, zmieniając warunek (24.1) na następujący

$$(24.7) \quad x(\lambda, 0) = \mu\lambda(\lambda_0 - \lambda).$$



Rys. 115. Kształt struny w chwili $t=0$.

Zakładamy więc, że w chwili $t=0$ struna ma kształt łuku paraboli (rysunek 115). Pozostałe warunki (24.2) i (24.3) pozostawiamy bez zmiany.

Teraz równanie operatorowe ma postać

$$(24.8) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s^2 x(\lambda) = -\alpha^2 \mu s \lambda(\lambda_0 - \lambda).$$

Szukamy najpierw rozwiązania wielomianowego

$$x_0(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania (24.8) i porównując współczynniki przy równych potęgach λ , znajdujemy

$$x_0(\lambda) = \mu \left(-\frac{2}{\alpha^2 s^3} + \frac{\lambda_0}{s} \lambda - \frac{1}{s} \lambda^2 \right).$$

Funkcja $x_0(\lambda)$ spełnia co prawda równanie (24.8), lecz nie spełnia warunków (24.3). Ale każda funkcja postaci

$$x(\lambda) = c_1 e^{-\alpha \lambda s} + c_2 e^{\alpha \lambda s} + x_0(\lambda)$$

jest również rozwiązaniem równania (24.8); dobieramy operatory c_1 i c_2 w ten sposób, żeby

$$x(0) = c_1 + c_2 - \frac{2\mu}{\alpha^2 s^3} = 0,$$

$$x'(\lambda_0) = c_1 e^{-\alpha \lambda_0 s} + c_2 e^{\alpha \lambda_0 s} - \frac{2\mu}{\alpha^2 s^3} = 0.$$

Mamy wtedy

$$c_1 = \frac{2\mu(1 - e^{-\alpha \lambda_0 s})}{\alpha^2 s^3(1 - e^{-2\alpha \lambda_0 s})} \quad \text{ i } \quad c_2 = \frac{2\mu(e^{-\alpha \lambda_0 s} - e^{-2\alpha \lambda_0 s})}{\alpha^2 s^3(1 - e^{-2\alpha \lambda_0 s})},$$

a stąd

$$x(\lambda) = \frac{2\mu}{\alpha^2} \cdot \frac{(-1 + e^{-2\alpha \lambda_0 s} + e^{-\alpha \lambda s} - e^{-\alpha(\lambda_0 + \lambda)s} + e^{-\alpha(\lambda_0 - \lambda)s} - e^{-\alpha(2\lambda_0 - \lambda)s})^3}{1 - e^{-2\alpha \lambda_0 s}} + \mu\lambda(\lambda_0 - \lambda).$$

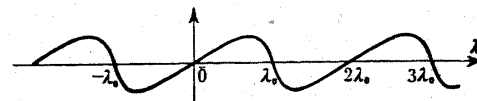
Rozwiązanie to jest podobne do znalezionej w paragrafie 23 dla struny w polu grawitacyjnym. Tam jednakże struna drgała między osią λ a parabolą $x = -\alpha^2 g \lambda(\lambda_0 - \lambda)$, w obecnym zaś przypadku drga między parabolami $x = \mu\lambda(\lambda_0 - \lambda)$ i $x = -\mu\lambda(\lambda_0 - \lambda)$.

§ 25. Drgania struny przy dowolnie zadanym położeniu początkowym

Niech $\varphi(\lambda)$ będzie dowolną funkcją liczbową ciągłą dla wszystkich λ rzeczywistych, taką że

$$(25.1) \quad -\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda + 2\lambda_0);$$

$\varphi(\lambda)$ jest więc funkcją nieparzystą i periodyczną o okresie $2\lambda_0$.



Rys. 116.

Z własności tych wynika, że $\varphi(k\lambda_0) = 0$ dla każdego k całkowitego.

Łatwo sprawdzić, że funkcja operatorowa $x_1(\lambda) = \left\{ \varphi \left(\lambda + \frac{t}{\alpha} \right) \right\}$ ($\alpha \neq 0$) ma pochodną ciągłą $x'_1(\lambda)$ i że

$$x'_1(\lambda) = \alpha s x_1(\lambda) - \alpha \varphi(\lambda);$$

istotnie, można napisać

$$x_1(\lambda) = s \left\{ \int_0^t \varphi \left(\lambda + \frac{\tau}{\alpha} \right) d\tau \right\} = s \left\{ \int_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda+t} \varphi \left(\frac{\tau}{\alpha} \right) d\tau \right\},$$

skąd

$$x'_1(\lambda) = s \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\alpha\lambda}^{\alpha\lambda+t} \varphi \left(\frac{\tau}{\alpha} \right) d\tau \right\} = \alpha s \left\{ \varphi \left(\lambda + \frac{t}{\alpha} \right) - \varphi(\lambda) \right\} = \alpha s x_1(\lambda) - \alpha \varphi(\lambda).$$

Podobnie funkcja operatorowa $x_2(\lambda) = \left\{ \varphi \left(\lambda - \frac{t}{\alpha} \right) \right\}$ ($\alpha \neq 0$) ma pochodną ciągłą

$$x'_2(\lambda) = -\alpha s x_2(\lambda) + \alpha \varphi(\lambda).$$

Stąd wynika, że funkcja

$$x(\lambda) = \frac{1}{2} [x_1(\lambda) + x_2(\lambda)]$$

ma pochodną ciągłą

$$x'(\lambda) = \frac{1}{2} \alpha s [x_1(\lambda) - x_2(\lambda)]$$

i ponadto jeszcze drugą pochodną ciągłą

$$x''(\lambda) = \frac{1}{2} \alpha^2 s^2 [x_1(\lambda) + x_2(\lambda)] - \alpha^2 s \varphi(\lambda).$$

Udowodniliśmy tym samym, że funkcja

$$(25.2) \quad x(\lambda) = \{x(\lambda, t)\} = \frac{1}{2} \left\{ \varphi \left(\lambda + \frac{t}{\alpha} \right) + \varphi \left(\lambda - \frac{t}{\alpha} \right) \right\}$$

spełnia równanie różniczkowe operatorowe

$$(25.3) \quad x''(\lambda) = \alpha^2 s^2 x(\lambda) - \alpha^2 s \varphi(\lambda);$$

jest to równanie struny przy warunkach początkowych

$$x(\lambda, 0) = \varphi(\lambda), \quad x_t(\lambda, 0) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

Wobec (25.1) widać, że

$$x(0, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi \left(\frac{t}{\alpha} \right) + \varphi \left(-\frac{t}{\alpha} \right) \right] = 0,$$

$$x(\lambda_0, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi \left(\lambda_0 + \frac{t}{\alpha} \right) + \varphi \left(\lambda_0 - \frac{t}{\alpha} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\varphi \left(\lambda_0 + \frac{t}{\alpha} \right) + \varphi \left(-\lambda_0 - \frac{t}{\alpha} \right) \right] = 0,$$

czyli w postaci operatorowej

$$(25.4) \quad x(0) = 0 \quad \text{ i } \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Zatem funkcja (25.2) przedstawia ruch struny o końcach nieruchomych i dowolnie zadany położeniu początkowym; przy tym cząstki struny nie mają w chwili $t=0$ żadnej prędkości.

Rozwiązanie (25.2) znał już d'Alembert. Korzyść z ujęcia operatorowego polega na tym, że w równaniu (25.3) możemy za $\varphi(\lambda)$ przyjąć dowolną funkcję ciągłą (spełniającą warunek (25.1)), a więc niekoniecznie różniczkowalną. Natomiast o ile wychodzimy z równania cząstkowego

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = \alpha^2 x_{tt}(\lambda, t),$$

to funkcję (25.2) można uważać za rozwiązanie tylko wtedy, gdy funkcja $\varphi(\lambda)$ jest dwa razy różniczkowalna, co nie wystarcza w zastosowaniach (zob. § 18).

Ponadto rachunek operatorów zapewnia jednoznaczność rozwiązania. Istotnie, gdyby oprócz $x(\lambda)$ istniało jeszcze drugie rozwiązanie $x_1(\lambda)$ równania (25.3), spełniające warunek (25.4), to różnica $y(\lambda) = x(\lambda) - x_1(\lambda)$ spełniałaby równanie jednorodne

$$y''(\lambda) = \alpha^2 s^2 y(\lambda)$$

i w konsekwencji mielibyśmy

$$y(\lambda) = c_1 e^{-\alpha\lambda s} + c_2 e^{\alpha\lambda s}.$$

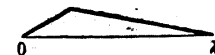
Ale

$$c_1 + c_2 = y(0) = x(0) - x_1(0) = 0 - 0 = 0,$$

$$c_1 e^{-\alpha\lambda_0 s} + c_2 e^{\alpha\lambda_0 s} = y(\lambda_0) = x(\lambda_0) - x_1(\lambda_0) = 0 - 0 = 0;$$

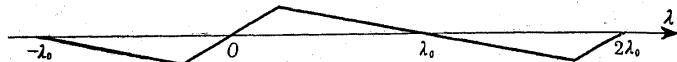
stąd $c_1 = c_2 = 0$ i w konsekwencji $y(\lambda) = 0$, czyli $x(\lambda) - x_1(\lambda) = 0$. Rozwiązanie (25.2) jest więc jedyne.

Wzór (25.2) nadaje się świetnie do graficznego badania ruchu struny. Przypuśćmy na przykład, że w chwili $t=0$ struna zostaje szarpnięta w jednej czwartej swej długości. Położeniu początkowemu odpowiada wtedy wykres podany na rysunku 117.



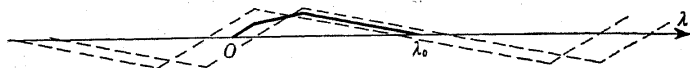
Rys. 117.

Wykres przedstawia funkcję $\varphi(\lambda)$ w przedziale $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Funkcję tę przedłużamy do $-\infty$ i do $+\infty$ zgodnie z wzorami (25.1) (rysunek 118).



Rys. 118.

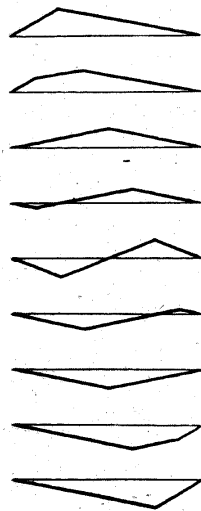
Aby teraz znaleźć kształt struny w chwili t , wystarczy wykres funkcji przedłużonej przesunąć o długość $\frac{t}{a}$ w lewo oraz o tę samą długość w prawo i graficznie znaleźć średnią arytmetyczną



Rys. 119.

dla obu przesuniętych wykresów (rysunek 119).

Metoda ta jest ogólna.



Rys. 120.

Na rysunku 120 podajemy kształt struny, znaleziony tym sposobem, w przeciągu połowy okresu drgania.

Ćwiczenia. 1. Stosując wzór (25.2) znaleźć rozwiązanie w przypadku

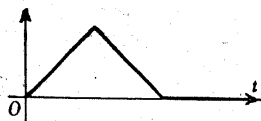
$$x(\lambda, 0) = \mu\lambda(\lambda_0 - \lambda)$$

i porównać je z rozwiązaniem znalezionym w paragrafie 24.

2. Stosując metodę graficzną, przestudiować ruch struny

(α) przy położeniu początkowym podanym na rysunku 115;

(β) przy położeniu początkowym podanym na rysunku 121.



Rys. 121.

§ 26. Drgania struny przy zadanej prędkości początkowej

Wyznamy teraz ruch struny, gdy zadane są warunki

$$\begin{aligned} x(\lambda, 0) &= 0, & x_t(\lambda, 0) &= \psi(\lambda) & (0 \leq \lambda \leq \lambda_0), \\ x(0, t) &= 0, & x(\lambda_0, t) &= 0 & (0 \leq t < \infty) \end{aligned}$$

przy założeniu, że nie działają na nią żadne siły zewnętrzne.

Wtedy równanie operatorowe ma postać

$$(26.1) \quad x''(\lambda) = a^2 s^2 x(\lambda) - a^2 \psi(\lambda),$$

a warunki

$$(26.2) \quad x(0) = 0, \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Zauważmy, że jeżeli $x(\lambda)$ spełnia równanie (26.1) z warunkami (26.2), to funkcja

$$y(\lambda) = s x(\lambda)$$

spełnia równanie

$$y''(\lambda) = a^2 s^2 y(\lambda) - a^2 s \psi(\lambda)$$

z tymi samymi warunkami (26.2). Jest więc

$$y(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ \psi \left(\lambda + \frac{t}{a} \right) + \psi \left(\lambda - \frac{t}{a} \right) \right\},$$

a stąd

$$x(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t \left[\psi \left(\lambda + \frac{\tau}{a} \right) + \psi \left(\lambda - \frac{\tau}{a} \right) \right] d\tau \right\}.$$

§ 27. Inne interpretacje

Równanie cząstkowe

$$(27.1) \quad x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_{tt}(\lambda, t)$$

występuje nie tylko w teorii struny drgającej, ale także w wielu innych zagadnieniach fizycznych. Przypuśćmy na przykład, że wzdłuż osi λ umieszczony jest pręt o współczynniku skręcalności E i masie δ przypadającej na jednostkę długości. Jeżeli przez $x(\lambda, t)$ oznaczymy kąt skręcenia pręta o współrzędnej λ w chwili t , to dojdziemy znowu do równania (27.1), gdzie $a^2 = \frac{E}{\delta}$. Równanie można też uważać za równanie drgań podłużnych pręta spręży-

stego. Zauważmy wreszcie, że równanie (27.1) jest przypadkiem szczególnym równania telegrafistów

$$x''(\lambda) = (Ls + R)(Cs + G)x(\lambda),$$

które omówimy obszerniej w rozdziale 8.

W poprzedniej dyskusji ograniczyliśmy się do jednej tylko interpretacji fizycznej, mianowicie do przypadku struny drgającej. Zakres zastosowań jest oczywiście szerszy, gdyż rachunki zawsze będą takie same, niezależnie od fizycznej ich interpretacji.

§ 28. Ogólne uwagi o zagadnieniu brzegowym

Zagadnieniem ogólniejszym od omawianych poprzednio jest następujące:

Dla danego równania cząstkowego

$$(28.1) \quad x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = \alpha^2 x_{tt}(\lambda, t)$$

należy znaleźć rozwiązanie $x(\lambda, t)$, które by spełniało warunki

$$(28.2) \quad x(\lambda, 0) = \varphi(\lambda), \quad x_t(\lambda, 0) = \psi(\lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0),$$

$$(28.3) \quad x(0, t) = v_1(t), \quad x(\lambda_0, t) = v_2(t) \quad (0 \leq t < \infty).$$

Warunki (28.2) bywają nazywane *warunkami Cauchy'ego*, a (28.3) *warunkami brzegowymi*. Warunki (28.2) i (28.3) razem wzięte nazywają się *warunkami mieszanymi*, a całe zagadnienie, polegające na znalezieniu rozwiązania $x(\lambda, t)$ równania (28.1) przy warunkach (28.2) i (28.3), *zagadnieniem mieszanym*.

Odpowiednikiem operatorowym jest równanie

$$(28.4) \quad x''(\lambda) = \alpha^2 s^2 x(\lambda) - \alpha^2 s \varphi(\lambda) - \alpha^2 \psi(\lambda)$$

z warunkami

$$(28.5) \quad x(0) = v_1, \quad x(\lambda_0) = v_2.$$

Warunki Cauchy'ego weszły tu już do samego równania; pozostały tylko warunki brzegowe (28.5). Omawianemu zagadnieniu mieszanemu dla równania cząstkowego (28.1) odpowiada zagadnienie brzegowe dla równania operatorowego (28.4). To ostatnie zagadnienie jest jednak ogólniejsze, dopuszcza bowiem rozwiązania, które nie mają sensu w odniesieniu do równania cząstkowego (28.1) (zob. § 18).

Można wyróżnić cztery przypadki szczególne:

- I. $\varphi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{i} \quad v_1 = 0;$
- II. $\varphi = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{i} \quad v_2 = 0;$
- III. $\varphi = 0, \quad v_1 = 0 \quad \text{i} \quad v_2 = 0;$
- IV. $\psi = 0, \quad v_1 = 0 \quad \text{i} \quad v_2 = 0.$

Oznaczmy odpowiednio przez

$$(28.6) \quad x_1(\lambda), \quad x_2(\lambda), \quad x_3(\lambda) \quad \text{i} \quad x_4(\lambda)$$

rozwiązania równania (28.4) z warunkami odpowiadającymi tym szczególnym przypadkom; będzie więc

$$\begin{aligned} x_1''(\lambda) &= \alpha^2 s^2 x_1(\lambda), & x_1(0) &= 0, & x_1(\lambda_0) &= v_2; \\ x_2''(\lambda) &= \alpha^2 s^2 x_2(\lambda), & x_2(0) &= v_1, & x_2(\lambda_0) &= 0; \\ x_3''(\lambda) &= \alpha^2 s^2 x_3(\lambda) - \alpha^2 \psi(\lambda), & x_3(0) &= x_3(\lambda_0) &= 0; \\ x_4''(\lambda) &= \alpha^2 s^2 x_4(\lambda) - \alpha^2 s \varphi(\lambda), & x_4(0) &= x_4(\lambda_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dodając do siebie wszystkie cztery równości różniczkowe i oznaczając

$$x(\lambda) = x_1(\lambda) + x_2(\lambda) + x_3(\lambda) + x_4(\lambda)$$

otrzymamy równość (28.4). Funkcja $x(\lambda)$ będzie ponadto spełniać warunki (28.5).

Funkcje (27.6) można nazwać *rozwiązaniami podstawowymi* danego zagadnienia brzegowego. W paragrafach 18, 25 i 26 znaleźliśmy rozwiązania podstawowe $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ i $x_4(\lambda)$. Funkcję $x_1(\lambda)$ można otrzymać z wzoru (20.5), podstawiając $v_1 = 0$.

Każde rozwiązanie zagadnienia brzegowego (28.4) i (28.5) jest sumą rozwiązań podstawowych.

Gdy $\varphi(\lambda)$ i $\psi(\lambda)$ są funkcjami ciągłymi, a v_1 i v_2 funkcjami klasy \mathcal{K} , to wszystkie podstawowe rozwiązania są funkcjami parametrycznymi. Stąd wynika, że wówczas $x(\lambda)$ jest również funkcją parametryczną.

Rozbicie zagadnienia brzegowego na cztery przypadki szczególne może przedstawiać pewne korzyści rachunkowe, gdyż pozwala stosować metody indywidualne do znalezienia rozwiązań podstawowych.

Droga ta oczywiście nadaje się również do rozwiązania ogólnego zagadnienia mieszanego dla równania cząstkowego (28.1).

jest ciągła dla $0 < \lambda < \infty$, $0 \leq t < \infty$, możemy napisać $l^{3/2} F'(\lambda) = -lF(\lambda)$ i w konsekwencji

$$(29.3) \quad F'(\lambda) = -\sqrt{s} F(\lambda).$$

Funkcja operatorowa $F(\lambda)$ daje się przedłużyć na wszystkie wartości rzeczywiste λ , tak żeby równanie (29.3) było nadal spełnione (zob. § 17). Wtedy będzie wobec wzoru (29.2)

$$F(0) = s^{3/2} \left\{ \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} \right\} = s^{3/2} (l \cdot l^{1/2}) = 1.$$

Stąd wynika, że przedłużona funkcja $F(\lambda)$ jest funkcją wykładniczą

$$F(\lambda) = e^{-\lambda\sqrt{s}}.$$

Dla dodatnich wartości λ funkcja ta redukuje się do funkcji parametrycznej

$$(29.4) \quad e^{-\lambda\sqrt{s}} = \left\{ \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \right\}.$$

Funkcję $e^{-\lambda\sqrt{s}}$ będziemy nazywali *funkcją wykładniczą paraboliczną* ze względu na jej związek z równaniem ciepła, które według ogólnej klasyfikacji równań cząstkowych zalicza się do typu *parabolicznego*.

Warto też zanotować wzór

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\lambda\sqrt{s}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \right\},$$

który wynika od razu z (29.1).

Funkcja wykładnicza paraboliczna jest ściśle związana z *funkcją błędu* (str. 106). Istotnie przy $\lambda > 0$ jest

$$(29.5) \quad \frac{1}{s} e^{-\lambda\sqrt{s}} = \left\{ \int_0^t \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right) d\tau \right\};$$

podstawiając w ostatniej całce $\sigma = \frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}$, znajdujemy

$$(29.6) \quad \frac{1}{s} e^{-\lambda\sqrt{s}} = \left\{ \operatorname{erf} \frac{\lambda}{2\sqrt{l}} \right\},$$

ROZDZIAŁ VI

Równanie ciepła

§ 29. Funkcja wykładnicza paraboliczna

Funkcja wykładnicza paraboliczna $e^{-\lambda\sqrt{s}}$ będzie grała podobną rolę w *równaniu ciepła*, którym zajmiemy się w tym rozdziale, jaką funkcja wykładnicza hiperboliczna gra w teorii równania struny drgającej.

Dla wprowadzenia jej bierzemy najpierw funkcję parametryczną

$$F(\lambda) = \{F(\lambda, t)\} = \left\{ \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \right\} \quad (0 < \lambda < \infty).$$

Mamy równość

$$l^{1/2} F(\lambda) = \left\{ \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right) d\tau \right\}$$

i po podstawieniu $\frac{\lambda^2}{4\tau} = \frac{\lambda^2}{4t} + \sigma^2$

$$(29.1) \quad l^{1/2} F(\lambda) = \left\{ \frac{2}{\pi\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \cdot \int_0^\infty e^{-\sigma^2} d\sigma \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right) \right\}.$$

Mamy dalej

$$(29.2) \quad l^{3/2} F(\lambda) = \left\{ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right) d\tau \right\}.$$

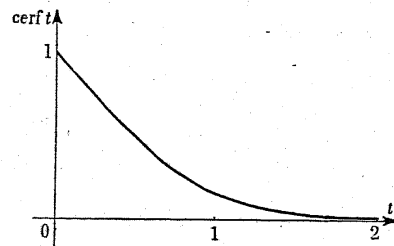
Ponieważ pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right) d\tau = - \int_0^t \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\tau}\right) d\tau$$

gdzie

$$\operatorname{cerf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = 1 - \operatorname{erf} t.$$

Funkcja cerf jest ciągła i maleje w przedziale $0 \leq t < \infty$ od 1 do 0 (zob. § 54, część I).



Rys. 122.

Wobec $\operatorname{cerf} 0 = 1$ widać, że wzór (29.6) jest prawdziwy nie tylko dla $\lambda > 0$, ale także dla $\lambda = 0$ (w przeciwieństwie do wzoru (29.5), który przy $\lambda = 0$ daje z lewej strony $\frac{1}{s}$, z prawej zaś 0).

Symbol cerf ma oznaczać uzupełnienie (*complementum*) do funkcji erf (podobnie jak

na przykład ctg oznacza uzupełnienie do funkcji tg).

§ 30. Niektóre analityczne własności funkcji wykładniczej parabolicznej

Przy każdym ustalonym $\lambda > 0$ operator $e^{-\lambda \sqrt{s}}$ przedstawia pewną funkcję zmiennej t , określoną wzorem

$$(30.1) \quad F(\lambda, t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right).$$

Zbadamy przebieg tej funkcji.

Jest to w każdym razie funkcja dodatnia dla $0 < t < \infty$. Widać też, że

$$\lim_{t \rightarrow 0+} F(\lambda, t) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(\lambda, t) = 0;$$

stąd wynika, że maksimum $F(\lambda, t)$ jest osiągnięte wewnątrz przedziału $0 < t < \infty$. Aby to maksimum znaleźć, przyrównujemy pochodną względem t

$$(30.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} F(\lambda, t) = (\lambda^2 - 6t) \frac{\lambda}{8\sqrt{\pi t^7}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4t}\right)$$

do zera. Stąd widać, że maksimum jest osiągnięte w punkcie $t = \frac{\lambda^2}{6}$ i wynosi

$$(30.3) \quad F(\lambda, \frac{1}{6}\lambda^2) = \frac{3}{\lambda^2} \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}.$$

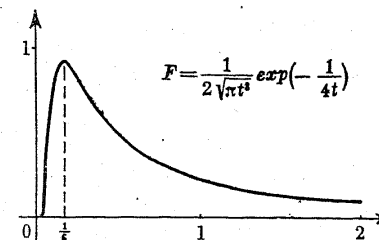
Ze wzoru (30.2) widać też, że

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\partial}{\partial t} F(\lambda, t) = 0;$$

oznacza to, że styczna do krzywej staje się pozioma, gdy punkt t zbliża się do zera.

Na rysunku 123 podajemy wykres funkcji (30.1) przy $\lambda = 1$.

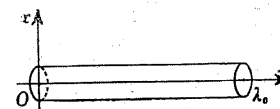
Uwaga. Jeżeli przyjmiemy $F(\lambda, 0) = 0$, to F będzie funkcją klasy C (przy każdym ustalonym $\lambda > 0$). Funkcja ta ma pochodną równą zero w punkcie $t = 0$. Można udowodnić, że wszystkie jej pochodne są równe zero w punkcie $t = 0$.



Rys. 123.

§ 31. Temperatura pręta przewodzącego ciepło

Wyobraźmy sobie, że przez pręt długości λ_0 przechodzi oś zmiennej λ , tak że początek pręta ma współrzędną $\lambda = 0$, koniec zaś



Rys. 124.

$\lambda = \lambda_0$. Przypuścimy, że K oznacza przewodnictwo ciepła, c ciepło właściwe, δ zaś gęstość pręta. Przypuścimy dalej, że ściana boczna pręta jest doskonale izolowana, tak że ciepło może dopływać i odpływać jedynie końcami pręta. Jeżeli przez $x(\lambda, t)$

oznaczymy temperaturę warstwy pręta o współrzędnej λ w chwili t , to będzie spełnione równanie cząstkowe

$$(31.1) \quad x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_t(\lambda, t),$$

gdzie $a = \sqrt{c\delta/K}$.

Przypuścimy, że w chwili $t = 0$ temperatura w całym pręcie wynosi 0

$$(31.2) \quad x(\lambda, 0) = 0 \quad (0 < \lambda < \lambda_0)$$

i że znamy przebieg temperatury na obydwu końcach pręta, mianowicie

$$(31.3) \quad x(0, t) = v(t), \quad x(\lambda_0, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Zadanie polega na wyznaczeniu rozkładu temperatury w dowolnej chwili $t > 0$. Matematycznie chodzi więc o rozwiązanie równania różniczkowego (31.1) przy zadanych warunkach (31.2) i (31.3).

Wobec założenia (31.2) równanie (31.1) można zapisać w symbolice operatorowej w następujący sposób:

$$(31.4) \quad x''(\lambda) = \alpha^2 s x(\lambda);$$

warunkom zaś (31.3) odpowiadają warunki

$$(31.5) \quad x(0) = v, \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Szukamy najpierw funkcji wykładniczych $e^{\lambda w}$, spełniających równanie (31.4), to znaczy takich, że

$$(e^{\lambda w})'' = \alpha^2 s e^{\lambda w}.$$

Po wykonaniu różniczkowania mamy

$$w^2 e^{\lambda w} = \alpha^2 s e^{\lambda w},$$

skąd

$$w^2 = \alpha^2 s$$

i $w = -\alpha\sqrt{s}$ lub $w = \alpha\sqrt{s}$. Istnieją więc dwie (i tylko dwie) funkcje wykładnicze

$$e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}} \quad \text{i} \quad e^{\alpha\lambda\sqrt{s}},$$

spełniające równanie (31.4).

Każda funkcja operatorowa kształtu

$$(31.6) \quad x(\lambda) = c_1 e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}} + c_2 e^{\alpha\lambda\sqrt{s}}$$

spełnia również równanie (31.4), jakkolwiek ustalimy operatory c_1 i c_2 .

Dobierzemy te operatory w ten sposób, żeby

$$(31.7) \quad \begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = v, \\ x(\lambda_0) &= c_1 e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}} + c_2 e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}} = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań, znajdujemy

$$c_1 = \frac{v}{1 - e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{-e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}} \cdot v}{1 - e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}.$$

Stąd szukane rozwiązanie równania (31.4)

$$(31.8) \quad x(\lambda) = \frac{(e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}} - e^{-\alpha(2\lambda_0 - \lambda)\sqrt{s}}) v}{1 - e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}}.$$

Łatwo udowodnić, że każda funkcja operatorowa $y(\lambda)$ spełniająca równanie (31.4) jest kształtu (31.6). Istotnie, funkcja ta spełnia w punkcie $\lambda = 0$ jakieś warunki

$$y(0) = k_0 \quad \text{i} \quad y'(0) = k_1.$$

Ale we wzorze (31.6) można zawsze tak dobrać współczynniki c_1 i c_2 , żeby

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = k_0, \\ x'(0) &= -c_1 \alpha \sqrt{s} + c_2 \alpha \sqrt{s} = k_1, \end{aligned}$$

gdyż wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha\sqrt{s} & \alpha\sqrt{s} \end{vmatrix} = 2\alpha\sqrt{s}$$

jest różny od zera. Przy tak dobranych wartościach c_1 i c_2 mamy $y(\lambda) = x(\lambda)$ dla wszystkich λ (zob. § 16 i 17).

Skoro każde rozwiązanie równania (31.4) jest kształtu (31.6), to jedynym rozwiązaniem, spełniającym warunki (31.5) jest funkcja (31.8) gdyż współczynniki c_1 i c_2 zostały wyznaczone jednoznacznie z równań (31.7).

Rozwiązanie (31.8) można łatwo przystosować do rachunków liczbowych przez rozwinięcie go w szereg nieskończony. Aby to poprawnie przeprowadzić, przypomnimy najpierw pewne wiadomości z klasycznej teorii szeregów.

§ 32. O zbieżności szeregów liczbowych

Z analizy wiadomo, że każdy ciąg liczbowy nie malejący

$$A_1, A_2, \dots,$$

którego wszystkie wyrazy są wspólnie ograniczone

$$A_n \leq M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

jest zbieżny¹⁾.

Stąd wynika, że szereg liczbowy

$$a_1 + a_2 + \dots$$

o wyrazach niewjemnych jest zbieżny, skoro tylko jego sumy cząstkowe są wspólnie ograniczone

$$a_1 + \dots + a_n \leq M.$$

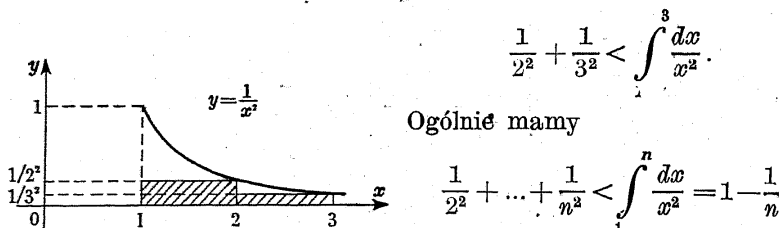
¹⁾ Kuratowski [22], str. 29, twierdzenie 3; Leja [23], str. 22, 1°.

Korzystając z ostatniego twierdzenia, udowodnimy, że szereg

$$(32.1) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

jest zbieżny.

Istotnie, z rysunku 125 widać, że pole zakreskowane leży pod krzywą $y = \frac{1}{x^2}$, skąd wynika, że



Rys. 125.

i wobec tego

$$\frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Zatem sumy cząstkowe szeregu (32.1) są wspólnie ograniczone przez liczbę $M=2$. Ponieważ wyrazy tego szeregu są dodatnie, więc szereg jest zbieżny.

Rozumowanie to nie daje jednak dokładnej wartości sumy szeregu; w paragrafie 40 udowodnimy, że suma ta wynosi $\frac{\pi^2}{6}$.

Natomiast szereg harmoniczny

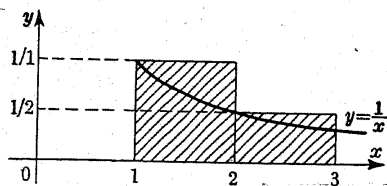
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots$$

nie jest zbieżny i wobec tego nie przedstawia żadnej liczby (skończonej).

Istotnie, z rysunku 126 widać, że pole zakreskowane jest większe od pola zawartego między

krzywą $y = \frac{1}{x}$ a osią x , to znaczy że

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} > \int_1^3 \frac{dx}{x}.$$



Rys. 126.

Ogólnie mamy

$$\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1),$$

to znaczy, że sumy cząstkowe rozważanego szeregu są większe od $\ln(n+1)$. Ponieważ $\ln(n+1)$ dąży do nieskończoności przy $n \rightarrow \infty$, więc sumy cząstkowe tym bardziej dążą do nieskończoności i szereg jest zbieżny.

Ćwiczenia. 1. Udowodnić, że szereg $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots$ jest zbieżny.

2. Udowodnić ogólniej, że jeżeli $p > 1$, to szereg $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots$ jest zbieżny.

3. Udowodnić, że jeżeli $p < 1$, to szereg $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots$ jest rozbieżny.

§ 33. Kryterium majoranty

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Niech

$$(33.1) \quad a_1 + a_2 + \dots$$

i

$$(33.2) \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$$

będą szeregami liczbowymi o wyrazach rzeczywistych. Jeżeli

$$(33.3) \quad |a| \leq \gamma_n \quad (n=1, 2, \dots; \beta > 0)$$

i jeżeli szereg (33.2) jest zbieżny, to szereg (33.1) jest również zbieżny.

Szereg (33.2) spełniający nierówności (33.3) nazywamy *majorantą* szeregu (33.1). Twierdzenie powyższe można wypowiedzieć słowami: *Jeżeli pewien szereg ma majorantę zbieżną, to sam jest zbieżny.*

Dowód. Niech

$$(33.4) \quad a'_1 + a'_2 + \dots$$

będzie szeregiem, który powstaje z szeregu (33.1) przez zastąpienie liczbą 0 wszystkich wyrazów ujemnych; podobnie, niech

$$(33.5) \quad a''_1 + a''_2 + \dots$$

będzie szeregiem, który powstaje z szeregu (33.1) przez zastąpienie liczbą 0 wszystkich wyrazów dodatnich i zmianę znaku w wyrazach pozostałych.

Wtedy jest

$$(33.6) \quad (a'_1 + \dots + a'_n) - (a''_1 + \dots + a''_n) = a_1 + \dots + a_n,$$

$$(33.7) \quad (a'_1 + \dots + a'_n) + (a''_1 + \dots + a''_n) = |a_1| + \dots + |a_n| \leq \gamma_1 + \dots + \gamma_n \leq M,$$

gdzie $M = \beta(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots)$. Z (33.7) wynika, że

$$a'_1 + \dots + a'_n \leq M \quad \text{i} \quad a''_1 + \dots + a''_n \leq M;$$

ponieważ wyrazy szeregów (33.4) i (33.5) są nieujemne, więc szeregi te są zbieżne.

Wobec (33.6) wynika dalej, że ciąg sum cząstkowych $a_1 + \dots + a_n$ jest zbieżny, czyli, że szereg (33.1) jest zbieżny.

Udowodnione twierdzenie ma liczne zastosowania. Wynika z niego na przykład, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{1^2} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \dots$$

są zbieżne; jest to oczywiste dla pierwszego szeregu, dla drugiego zaś wynika ze wzorów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} \quad \text{i} \quad \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} < \frac{1}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Ćwiczenie. Udowodnić zbieżność szeregów

$$(\alpha) \quad \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots; \quad (\beta) \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

§ 34. O jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych

Niech f_1, f_2, \dots będą funkcjami ograniczonymi w pewnym przedziale I . Mówimy, że szereg funkcyjny

$$(34.1) \quad f_1(t) + f_2(t) + \dots$$

jest w przedziale I *jednostajnie zbieżny* do $f(t)$, jeżeli w tym przedziale ciąg sum cząstkowych

$$s_n(t) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$$

jest jednostajnie zbieżny do $f(t)$.

Jednostajna zbieżność ciągu $s_n(t)$ do $f(t)$ oznacza istnienie ciągu liczbowego $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ zbieżnego do zera, takiego że

$$|s_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

dla wszystkich t z przedziału I .

Wobec tego mamy dla $n \geq 2$ nierówność

$$|f_n(t)| = |s_n(t) - s_{n-1}(t)| = |[s_n(t) - f(t)] - [s_{n-1}(t) - f(t)]| \leq \leq |s_n(t) - f(t)| + |s_{n-1}(t) - f(t)| \leq \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = \gamma_n.$$

Stąd wynika twierdzenie:

Jeżeli szereg (34.1) jest jednostajnie zbieżny w przedziale I , to istnieje ciąg liczbowy γ_n zbieżny do zera, taki że

$$(34.2) \quad |f_n(t)| \leq \gamma_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

dla wszystkich t z przedziału I .

Z nierówności (34.2) nie można jednak wnosić o zbieżności szeregu (34.1). Istotnie, gdy na przykład jest $f_n(t) = \frac{1}{n}$ w przedziale I , to warunek (34.2) jest spełniony, a szereg $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots$ jest rozbieżny.

Prawdziwe jest natomiast następujące twierdzenie:

Jeżeli w przedziale I jest spełniony warunek (34.2) i jeżeli szereg liczbowy

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots$$

jest zbieżny, to szereg funkcyjny (34.1) jest w przedziale I jednostajnie zbieżny.

Mniej dokładnie można powiedzieć: *Jeżeli szereg funkcyjny ma majorantę liczbową zbieżną, to jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód. Jeżeli t ustalimy dowolnie w przedziale I , to szereg (34.1) możemy traktować jako liczbowy. Jest on zbieżny na podstawie twierdzenia z poprzedniego paragrafu. Ponieważ t możemy ustalić dowolnie, szereg (34.1) jest zbieżny w całym przedziale do pewnej funkcji $f(t)$. Zbieżność jednostajna wynika z nierówności

$$|f(t) - f_n(t)| = |f_{n+1}(t) + f_{n+2}(t) + \dots| \leq |f_{n+1}(t)| + |f_{n+2}(t)| + \dots \leq \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} + \dots = \varepsilon_n,$$

gdyż ciąg liczbowy ε_n jest zbieżny do zera. (Zbieżność ciągu ε_n do zera wynika z równości $\varepsilon_n = \Gamma - \Gamma_n$, gdzie Γ jest sumą, Γ_n zaś sumą cząstkową szeregu $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots$)

Przykład. Jeżeli

$$f_v(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t=0, \\ \frac{\nu\lambda}{\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\nu^2 \lambda^2}{t}\right) & \text{dla } 0 < t < \infty, \end{cases}$$

to szereg $f_1(t) + f_2(t) + \dots$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $0 \leq t < \infty$, gdyż ma w tym przedziale zbieżną majorantę liczbową $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots$, gdzie (zob. § 30)

$$\gamma_v = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{3}{4\lambda^2} \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że szeregi

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^2}, \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}, \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \frac{\cos(2n-1)\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (\lambda_0 > 0),$$

są jednostajnie zbieżne w każdym przedziale.

§ 35. Rozwinięcie rozwiązania w szereg nieskończony

Możemy napisać

$$\frac{1}{1 - e^{-2\lambda_0 \sqrt{s}}} = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} e^{-2\nu\lambda_0 \sqrt{s}} = 1 + \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\nu\lambda_0}{\sqrt{\pi s^3}} \exp\left(-\frac{\nu^2 \alpha^2 \lambda_0^2}{t}\right) \right\};$$

szereg jest zbieżny, gdyż ze wzoru (30.3) mamy

$$0 < \frac{\nu\lambda_0}{\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\nu^2 \alpha^2 \lambda_0^2}{t}\right) < \frac{1}{v^2} \cdot \frac{3}{4\alpha^2 \lambda_0^2} \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}},$$

co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu w klamrze $\{ \}^1$.

Wobec tego rozwiązanie (31.8) można przedstawić w postaci

$$x(\lambda) = v \left(\sum_{v=0}^{\infty} e^{-\alpha(2\nu\lambda_0 + \lambda)\sqrt{s}} - \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\alpha(2\nu\lambda_0 - \lambda)\sqrt{s}} \right)$$

¹⁾ Zbieżność rozważanego szeregu wynika też z ogólnego twierdzenia o szeregach potęgowych, które podamy w paragrafie 50.

lub

$$x(\lambda, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \int_0^t v(t-\tau) \frac{\alpha(2\nu\lambda_0 + \lambda)}{2\sqrt{\pi \tau^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(2\nu\lambda_0 + \lambda)^2}{4\tau}\right) d\tau - \\ - \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^t v(t-\tau) \frac{\alpha(2\nu\lambda_0 - \lambda)}{2\sqrt{\pi \tau^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(2\nu\lambda_0 - \lambda)^2}{4\tau}\right) d\tau.$$

Oznaczmy w szczególności przez $G(\lambda)$ rozwiązanie równania w przypadku, gdy $v = \frac{1}{s}$. Można wtedy napisać

$$G(\lambda) = \frac{1}{s} \left(\sum_{v=0}^{\infty} e^{-\alpha(2\nu\lambda_0 + \lambda)\sqrt{s}} - \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\alpha(2\nu\lambda_0 - \lambda)\sqrt{s}} \right)$$

lub

$$(35.1) \quad G(\lambda, t) = \sum_{v=0}^{\infty} \operatorname{erf} \frac{\alpha(2\nu\lambda_0 + \lambda)}{2\sqrt{t}} - \sum_{v=1}^{\infty} \operatorname{erf} \frac{\alpha(2\nu\lambda_0 - \lambda)}{2\sqrt{t}}.$$

Funkcja $G(\lambda, t)$ przedstawia rozkład temperatury w pręcie, który w chwili początkowej miał temperaturę 0 i którego początek $\lambda=0$ utrzymujemy stale w temperaturze 1, koniec zaś $\lambda=\lambda_0$ w temperaturze 0.

Przy pomocy funkcji G możemy też zapisać rozwiązanie w przypadku ogólnym, gdy temperatura pręta jest określona przez warunki (31.3). Istotnie, wobec wzoru (31.8) możemy napisać

$$x(\lambda, t) = \frac{1}{dt} \int_0^t v(t-\tau) G(\lambda, \tau) d\tau.$$

§ 36. Nierówności i moduł

Na ogół nie da się powiedzieć o dwóch operatorach, który z nich jest większy a który mniejszy, podobnie jak nie da się to zawsze powiedzieć o liczbach zespolonych. W szczególnym przypadku, gdy a i b są funkcjami klasy \mathcal{K} o wartościach rzeczywistych, to przez symbol

$$a \leq b$$

będziemy rozumieli, że

$$[a(t) \leq b(t)]$$

dla wszystkich wartości $t \geq 0$, w których obie funkcje są ciągłe.

Jest więc na przykład

$$(36.1) \quad e^{-\lambda \sqrt{s}} \leq 3 \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}} \cdot \frac{1}{\lambda^2 s} \quad (\lambda > 0),$$

co wynika z rachunku przeprowadzonego w paragrafie 30.

Podobnie mamy

$$\frac{s}{s^2+1} \leq \frac{1}{s},$$

gdyż $\cos t \leq 1$; natomiast między $s/(s^2+1)$ a $1/2s$ nie da się ustalić żaden znak nierówności, gdyż w pewnych punktach $\sin t$ jest większy, a w innych mniejszy od $\frac{1}{2}$.

Przez moduł $|a|$ funkcji a klasy \mathcal{K} będziemy rozumieli po prostu

$$|a| = |\{a(t)\}| = \{ |a(t)| \};$$

moduł $|a|$ jest więc znowu funkcją klasy \mathcal{K} . Jeżeli a i b są funkcjami klasy \mathcal{K} , to

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|,$$

gdyż

$$|a(t) + b(t)| \leq |a(t)| + |b(t)|,$$

$$\left| \int_0^t a(t-\tau) b(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |a(t-\tau)| \cdot |b(\tau)| d\tau.$$

Uwaga. Równość $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ na ogół nie jest prawdziwa. Gdyby bowiem tak było, to dla $a=l$ mielibyśmy

$$\left| \int_0^t b(\tau) d\tau \right| = \int_0^t |b(\tau)| d\tau,$$

co wcale nie musi zachodzić.

Przypuśćmy, że a_n ($n=1,2,\dots$) i a są funkcjami klasy \mathcal{C} .

Jeżeli istnieje funkcja $g \in \mathcal{C}$ i ciąg liczbowy ε_n zbieżny do zera, takie że

$$(36.2) \quad |a_n - a| \leq \varepsilon_n g \quad (n=1,2,\dots),$$

to ciąg a_n jest zbieżny do a jednostajnie w każdym przedziale skończonym $0 \leq t \leq t_0$, a więc jest także zbieżny w sensie operatorowym.

Istotnie, z ciągłości g wynika, że dla każdego przedziału skończonego $0 \leq t \leq t_0$ istnieje liczba M , spełniająca nierówność

$$|g(t)| \leq M \quad \text{dla } 0 \leq t \leq t_0;$$

stąd

$$|a_n(t) - a(t)| \leq \varepsilon_n M \quad \text{dla } 0 \leq t \leq t_0,$$

co oznacza jednostajną zbieżność w przedziale $0 \leq t \leq t_0$.

Można udowodnić także twierdzenie odwrotne, że jeżeli ciąg a_n funkcji klasy \mathcal{C} jest zbieżny do a jednostajnie w każdym przedziale $0 \leq t \leq t_0$, to istnieje taka funkcja $g \in \mathcal{C}$ i ciąg liczbowy ε_n zbieżny do zera, że zachodzą nierówności (33.2). W ten sposób definicja jednostajnej zbieżności w każdym przedziale skończonym daje się zastąpić przez równoważną definicję, w której nie ma już mowy o żadnych przedziałach.

Ćwiczenie. Udowodnić nierówności

$$(\alpha) \quad \frac{1}{s^2+a^2} \leq \frac{1}{as} \quad (\alpha > 0); \quad (\beta) \quad \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\lambda \sqrt{s}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi e}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\lambda s} \quad (\lambda > 0).$$

§ 37. Nieskończenie długi pręt

Wzór (31.8) można napisać w postaci

$$(37.1) \quad w(\lambda) = v e^{-\alpha \lambda \sqrt{s}} + b(\lambda),$$

gdzie

$$b(\lambda) = v \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\alpha(2\nu\lambda_0+\lambda)\sqrt{s}} - \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\alpha(2\nu\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}} \right).$$

Ale wobec (36.1) jest

$$\begin{aligned} |b(\lambda)| &\leq |v| \cdot 3 \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}} \cdot \frac{1}{s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu\lambda_0+\lambda)^2} + \frac{1}{(2\nu\lambda_0-\lambda)^2} \right) \leq \\ &\leq |v| \cdot 3 \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}} \cdot \frac{2}{\lambda_0^2 s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^2} = \frac{K}{\lambda_0^2} \cdot \frac{|v|}{s}, \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } K = 6 \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^2}.$$

Stąd widać, że gdy $\lambda_0 \rightarrow \infty$, to $b(\lambda)$ maleje do zera.

Przyjmując, że pręt jest bardzo długi, możemy we wzorze (37.1) pominąć wyraz $b(\lambda)$ i napisać rozwiązanie w postaci

$$(37.2) \quad w(\lambda) = v e^{-\alpha \lambda \sqrt{s}} \quad (\lambda \geq 0)$$

lub

$$(36.3) \quad w(\lambda, t) = \frac{\alpha \lambda}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t v(t-\tau) \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 \lambda^2}{4\tau}\right) d\tau \quad \begin{matrix} (0 \leq \lambda < \infty) \\ (0 < t < \infty) \end{matrix}.$$

Funkcja ta przedstawia rozkład ciepła w *pręcie nieskończonym* przy założeniu, że w chwili $t=0$ pręt miał temperaturę 0 i że temperatura w punkcie $\lambda=0$ dana jest przez funkcję v . *Pręt nieskończony* jest oczywiście idealizacją, podobnie jak *nieskończona struna* (zob. § 22).

Jeżeli temperatura w początkowym punkcie pręta jest stała $v = \frac{\omega}{s}$, to rozwiązanie (37.2) można napisać w postaci

$$x(\lambda) = \frac{\omega}{s} e^{-a\lambda\sqrt{s}} \quad (0 \leq \lambda < \infty)$$

lub

$$(37.4) \quad x(\lambda, t) = \omega \operatorname{erf} \frac{a\lambda}{2\sqrt{t}} \quad (0 \leq \lambda < \infty, 0 < t < \infty).$$

Uwaga. Funkcja (37.4) jest nieokreślona na prostej $t=0$; jeżeli jednak przyjmiemy

$$x(\lambda, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(\lambda, t) = 0,$$

to uczynimy ją ciągłą w całej ćwiartce płaszczyzny

$$0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq t < \infty$$

z wyjątkiem jednego punktu $\lambda=t=0$ (gdy $\omega \neq 0$). Wskutek tego nie istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe i równanie (31.1) nie może w nim być spełnione. Kłopot ten odpada, gdy za podstawowe równanie ciepła przyjmiemy równanie operatorowe (31.4), gdyż przy wszelkich λ rzeczywistych każde jego rozwiązanie ma pochodne, nawet dowolnie wysokiego rzędu.

Przy wyprowadzaniu wzoru (37.3) istotną rolę grał drugi z warunków (31.3) to jest warunek

$$(37.5) \quad x(\lambda_0, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty);$$

dopiero po uwzględnieniu tego warunku przechodziliśmy do granicy przy $\lambda_0 \rightarrow \infty$.

Do tego samego wzoru (37.3) można dojść, rozwiązując równanie (31.1) od razu dla całej ćwiartki $0 \leq \lambda < \infty, 0 \leq t < \infty$ i zastępując warunek (37.5) przez warunek analogiczny

$$(37.6) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x(\lambda, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty)$$

przy założeniu, że granica istnieje jednostajnie. Warunek (37.6) można jeszcze osłabić, zakładając tylko, że funkcja $x(\lambda, t)$ jest w pewien sposób ograniczona.

Ściśle mówiąc, będzie chodziło o znalezienie rozwiązania $x(\lambda, t)$ równania (31.1)

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = a^2 x_t(\lambda, t),$$

które by spełniało warunki

$$(37.7) \quad x(\lambda, 0) = 0 \quad (0 \leq \lambda < \infty),$$

$$x(0, t) = v(t) \quad (0 < t < \infty),$$

$$(37.8) \quad |x(\lambda, t)| \leq m(t) \quad (0 \leq \lambda < \infty, 0 \leq t < \infty),$$

gdzie v i m są danymi funkcjami klasy \mathcal{C} . Funkcja m nie będzie figurowała w samym rozwiązaniu, gdyż znaczenie warunku (37.8) polega tylko na pewnym ograniczeniu funkcji $x(\lambda, t)$, które zapewni jednoznaczność rozwiązania.

W ujęciu operatorowym obecne zagadnienie polega na znalezieniu funkcji parametrycznej $x(\lambda)$, spełniającej równanie (31.4)

$$x''(\lambda) = a^2 s x(\lambda)$$

i warunki

$$(37.9) \quad x(0) = v,$$

$$(37.10) \quad |x(\lambda)| \leq m \quad (0 \leq \lambda < \infty).$$

Ogólne rozwiązanie rozważanego równania ma kształt

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda\sqrt{s}} + c_2 e^{-2a\lambda\sqrt{s}}.$$

Udowodnimy, że przy założeniu, że $x(\lambda)$ jest funkcją parametryczną spełniającą warunek (37.10), musi być $c_2 = 0$.

Istotnie, możemy napisać

$$(37.11) \quad c_2 = x(\lambda) e^{-a\lambda\sqrt{s}} - c_1 e^{-2a\lambda\sqrt{s}};$$

ale wobec

$$0 \leq e^{-a\lambda\sqrt{s}} \leq 3 \sqrt{\frac{6}{\pi e^3}} \frac{1}{a^2 \lambda^2 s}$$

jest

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-a\lambda\sqrt{s}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-2a\lambda\sqrt{s}} = 0,$$

skąd przy założeniu (37.10) wynika, że prawa strona wzoru (37.11) dąży do zera przy $\lambda \rightarrow \infty$. Musi więc być $c_2 = 0$.

W ten sposób rozwiązanie redukuje się do postaci

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda\sqrt{s}}.$$

Z warunku (37.9) wynika dalej, że $c_1 = v$; skąd mamy szukane rozwiązanie

$$w(\lambda) = v e^{-\alpha \lambda \sqrt{s}},$$

czyli w zwykłej, nie operatorowej postaci rozwiązanie (37.3).

Znalezione rozwiązanie jest jedyne.

Można pokazać, że jeżeli pominie się założenie (37.8) względnie (37.10), to istnieją jeszcze inne rozwiązania. Jest tu więc inna sytuacja niż w przypadku struny nieskończonej, gdzie warunek ograniczoności rozwiązania nie odgrywał żadnej roli. W obecnym przypadku warunku ograniczoności nie można pominąć.

Można natomiast zastąpić go przez następujący słabszy warunek: dla każdej liczby $t_0 > 0$ istnieje taka liczba β_0 , że

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [e^{-\beta_0 \lambda^2} \max_{0 \leq t \leq t_0} |x(\lambda, t)|] = 0.$$

Wtedy utrzymuje się jeszcze twierdzenie o jednoznaczności. Dowód znajdzie czytelnik w pracy Tychonowa o równaniu ciepła ^{*)}.

Dla bardziej konkretnego zilustrowania sposobu rozchodzenia się ciepła wyobraźmy sobie długi pręt ze srebra o temperaturze początkowej 0° C; pręt ten ogrzewany jest stale z jednego końca do temperatury 100° C.

Potrzebne nam są następujące stałe fizyczne dla srebra:

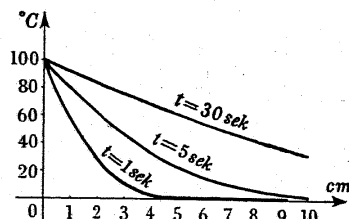
ciepło właściwe $c = 0,055$;
przewodnictwo $K = 1,01$;
gęstość $\delta = 10,5$.

Stąd mamy

$$\alpha = \sqrt{\frac{0,055 \cdot 10,5}{1,01}} \approx 0,76.$$

Zmiany temperatury są więc określone wzorem

$$x(\lambda, t) = 100 \operatorname{cerf} \left(0,38 \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \right).$$



Rys. 127. Rozchodzenie się ciepła w pręcie ze srebra

Po upływie jednej sekundy temperatura w odległości 10 cm od początku pręta podniesie się (teoretycznie) zaledwie o 0,00001° C, co oczywiście nie da się stwierdzić

^{*)} Tychonoff [47].

doświadczalnie. Dysponując termometrem, który reaguje na wahania 0,1° C, możemy po jednej sekundzie stwierdzić podwyższenie się ciepłoty najwyższej w odległości 4,8 cm. Mając zaś termometr czulszy, który wykazuje zmiany 0,001° C, stwierdzimy podwyższenie temperatury w odległości 8,2 cm.

Na rysunku 126 podaliśmy w postaci wykresu rozkład temperatury w pręcie po upływie jednej, pięciu i trzydziestu sekund.

§ 38. Pręt bez odpływu ciepła

Rozwiążemy teraz równanie

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) = \alpha^2 x_t(\lambda, t) \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0, 0 \leq t < \infty)$$

przy założeniach

$$x(\lambda, 0) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0),$$

$$x(0, t) = v(t) \quad (0 \leq t < \infty),$$

$$x_\lambda(\lambda_0, t) = 0$$

W interpretacji fizycznej pierwsza pochodna $x_\lambda(\lambda_0, t)$ oznacza ilość ciepła przepływającą przez punkt λ_0 . Założenie, że ta pochodna jest równa zero, oznacza, że koniec pręta jest (podobnie jak jego cała boczna ściana) doskonale izolowany od otoczenia. Założenie to wprowadziliśmy w miejsce założenia z paragrafu 31, że koniec pręta $\lambda = \lambda_0$ jest stale utrzymywany w temperaturze 0.

Równanie operatorowe ma w dalszym ciągu kształt

$$x''(\lambda) = \alpha^2 s x(\lambda),$$

lecz warunki na końcach pręta są określone przez równości

$$x(0) = v, \quad x'(\lambda_0) = 0.$$

Ogólnym rozwiązaniem równania jest funkcja

$$x(\lambda) = c_1 e^{-\alpha \lambda \sqrt{s}} + c_2 e^{\alpha \lambda \sqrt{s}};$$

stałe c_1 i c_2 wyznaczamy z warunków

$$x(0) = c_1 + c_2 = v,$$

$$x'(\lambda_0) = -c_1 \alpha \sqrt{s} e^{-\alpha \lambda_0 \sqrt{s}} + c_2 \alpha \sqrt{s} e^{\alpha \lambda_0 \sqrt{s}} = 0;$$

znajdujemy w ten sposób

$$c_1 = \frac{v}{1 + e^{-2\alpha \lambda_0 \sqrt{s}}}, \quad c_2 = \frac{v e^{-2\alpha \lambda_0 \sqrt{s}}}{1 + e^{-2\alpha \lambda_0 \sqrt{s}}}$$

i ostatecznie

$$x(\lambda) = \frac{(e^{-a\lambda\sqrt{s}} + e^{-a(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}})v}{1 + e^{-2a\lambda_0\sqrt{s}}}.$$

Rozwiązanie to tylko tym różni się od (31.8), że teraz w liczniku i mianowniku występują sumy zamiast różnic. W tym przypadku można stosować również rozwinięcia na szeregi, wychodząc z wzoru

$$\frac{1}{1 + e^{-2a\lambda_0\sqrt{s}}} = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v e^{-2va\lambda_0\sqrt{s}}.$$

Dowód zbieżności jest taki sam jak poprzednio. Wzory znalezione tą drogą będą się różniły od poprzednich tylko znakami i szczegółowo ich wypisywać nie będziemy.

§ 39. Szeregi trygonometryczne

Szeregiem trygonometrycznym nazywamy szereg

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

gdzie a_n i b_n są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, x zaś zmienną, o której będziemy zakładali, że przyjmuje wartości rzeczywiste.

Istnieją ogólne warunki pozwalające stwierdzić w wielu przypadkach, czy dana funkcja $f(x)$ daje się przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego. Znane też są od dawna wzory na współczynniki tego szeregu.

Tutaj nie będziemy korzystali z ogólnej teorii, natomiast ograniczymy się do rozpatrzenia kilku prostych przypadków, które będą nam potrzebne w dalszym ciągu¹⁾.

Udowodnimy najpierw, że

$$(39.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2} \quad \text{dla } -\pi < x < \pi$$

i że zbieżność tego szeregu jest jednostajna w każdym przedziale zamkniętym $[-x_0, x_0]$ zawartym w $(-\pi, \pi)$.

Na podstawie tożsamości

$$2 \cos kx \cos \frac{x}{2} = \cos \left(k - \frac{1}{2}\right)x + \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)x$$

mamy

$$\begin{aligned} 2[\cos x - \cos 2x + \dots + (-1)^{k-1} \cos kx] \cos \frac{x}{2} &= \\ &= \left[\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right] - \left[\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{5x}{2} \right] + \dots + \\ &+ (-1)^{k-1} \left[\cos \left(k - \frac{1}{2}\right)x + \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)x \right] = \\ &= \cos \frac{x}{2} + (-1)^{k-1} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)x, \end{aligned}$$

a stąd

$$\sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \cos nx = \frac{1}{2} + (-1)^{k-1} \frac{\cos \left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \cos \frac{1}{2}x}.$$

Całkując ostatnią równość w granicach od 0 do x , mamy

$$(39.2) \quad \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2} + (-1)^{k-1} I_k(x),$$

gdzie

$$I_k(x) = \int_0^x \frac{\cos \left(k + \frac{1}{2}\right)\xi}{2 \cos \frac{1}{2}\xi} d\xi.$$

Wykonując całkowanie przez części, znajdujemy

$$I_k(x) = \frac{1}{2k+1} \left[\frac{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)x}{\cos \frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin \frac{1}{2}\xi \sin \left(k + \frac{1}{2}\right)\xi}{\cos^2 \frac{1}{2}\xi} d\xi \right];$$

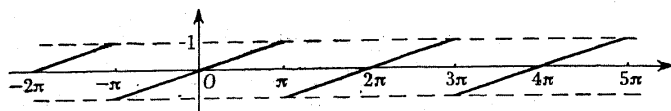
¹⁾ Nie możemy zresztą powołać się na polskie podręczniki analizy, gdyż nie ma w nich twierdzeń o jednostajnej zbieżności szeregów trygonometrycznych (w częściowych przedziałach). Twierdzenia zaś takie są potrzebne przy stosowaniu szeregów trygonometrycznych do rozwiązywania równań różniczkowych (klasycznych i operatorowych).

stąd mamy dla $|x| \leq x_0 < \pi$

$$|I_k(x)| \leq \frac{1}{2k+1} \left[\frac{1}{\cos \frac{1}{2}x_0} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{d\xi}{\cos^2 \frac{1}{2}\xi} \right] = \frac{1}{2k+1} \left(\sec \frac{x_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} \right).$$

Nierówność ta dowodzi, że ciąg $I_k(x)$ dąży przy $k \rightarrow \infty$ do zera jednostajnie w przedziale $[-x_0, x_0]$. Stąd wynika twierdzenie.

Dla $x = \pm \pi$ szereg (39.1) jest, jak od razu widać, również zbieżny, ale już nie do $x/2$ lecz do zera. Ponadto, z okresowości $\sin nx$ widać, że szereg (39.1) jest zbieżny do funkcji okresowej, przedstawionej na rysunku 128.



Rys. 128.

Z szeregu (39.1) można wyprowadzić wiele innych szeregów trygonometrycznych. Na przykład szereg

$$(39.3) \quad \varphi_1(\lambda) = \frac{2\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$$

można otrzymać z szeregu (39.1), podstawiając $x = \frac{\pi\lambda}{\lambda_0}$.

Szereg (39.3) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale zamkniętym, nie zawierającym punktów $(2k-1)\lambda_0$ (k całkowite).

Mamy oczywiście

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda \quad \text{dla} \quad -\lambda_0 < \lambda < \lambda_0.$$



$$a. \varphi_1(\lambda) = \frac{2\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$$

$$b. \varphi_2(\lambda) = \frac{2\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$$

Rys. 129.

Zastępując w szeregu (39.3) λ przez $\lambda_0 - \lambda$, dostajemy nową funkcję

$$(39.4) \quad \varphi_2(\lambda) = \varphi_1(\lambda_0 - \lambda) = \frac{2\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0},$$

taką że

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda_0 - \lambda \quad \text{dla} \quad 0 < \lambda < 2\lambda_0.$$

Szereg (38.4) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale zamkniętym, nie zawierającym punktów $2k\lambda_0$ (k całkowite).

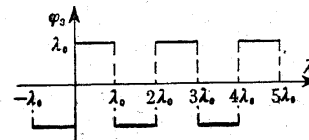
Dodając do siebie szeregi (39.3) i (39.4), mamy

$$(39.5) \quad \varphi_3(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda) = \frac{4\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi\lambda}{\lambda_0};$$

jest teraz

$$(39.6) \quad \varphi_3(\lambda) = \begin{cases} -\lambda_0 & \text{dla} \quad -\lambda_0 < \lambda < 0, \\ \lambda_0 & \text{dla} \quad 0 < \lambda < \lambda_0. \end{cases}$$

Szereg (39.5) jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale zamkniętym, nie zawierającym punktów $k\lambda_0$ (k całkowite), gdyż w takich przedziałach każdy z szeregów (39.4) i (39.5) jest jednostajnie zbieżny.



$$\text{Rys. 130.} \quad \varphi_3(\lambda) = \frac{4\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi\lambda}{\lambda_0}$$

§ 40. Całkowanie i różniczkowanie szeregów funkcyjnych

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $g_n(\lambda)$ (o wartościach liczbowych) jest zbieżny do $g(\lambda)$ jednostajnie w przedziale skończonym $[\lambda_1, \lambda_2]$, to

$$\int_a^\lambda g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\lambda g_n(t) dt$$

dla a i λ należących do przedziału $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Istotnie, istnieje ciąg liczbowy ε_n , zbieżny do zera i taki, że

$$|g_n(\lambda) - g(\lambda)| \leq \varepsilon_n;$$

wobec tego

$$\left| \int_a^\lambda g_n(t) dt - \int_a^\lambda g(t) dt \right| \leq \left| \int_a^\lambda |g_n(t) - g(t)| dt \right| \leq \left| \int_a^\lambda \varepsilon_n dt \right| = \\ = \varepsilon_n |\lambda - a| \leq \varepsilon_n (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ponieważ ciąg liczbowy $\varepsilon_n (\lambda_2 - \lambda_1)$ jest zbieżny do zera, twierdzenie jest udowodnione.

Udowodniliśmy nawet więcej, mianowicie, że przy ustalonym a ciąg funkcyj

$$G_n(\lambda) = \int_a^\lambda g_n(t) dt$$

jest zbieżny *jednostajnie* w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Ponieważ jednostajna zbieżność ciągu sum cząstkowych oznacza jednostajną zbieżność szeregu, mamy stąd od razu twierdzenie:

Niech

$$(40.1) \quad f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda)$$

będzie szeregiem funkcyj ciągłych (o wartościach liczbowych) zbieżnym jednostajnie w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$. Wówczas

$$(40.2) \quad \int_a^\lambda f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^\lambda f_n(t) dt$$

dla a i λ należących do przedziału $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Równość (40.2) można też zapisać w postaci

$$(40.3) \quad \int_a^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^\lambda f_n(t) dt.$$

Możemy więc powiedzieć, że jeżeli całkowany szereg jest *jednostajnie zbieżny*, to znak całki wolno przedstawiać ze znakiem sumy.

Przykład.

$$\int_0^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\lambda \frac{\cos nt}{n^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\lambda}{n^3}.$$

Napiszmy teraz

$$(40.4) \quad F_n(\lambda) = \int_a^\lambda f_n(t) dt + \gamma_n,$$

gdzie

$$(40.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \gamma.$$

Wtedy jest $\frac{d}{d\lambda} F_n(t) = f_n(t)$ i wobec (40.3)

$$\int_a^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} F_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\lambda) - \gamma.$$

Stąd mamy po różniczkowaniu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} F_n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\lambda).$$

Równość ta wyraża, że znak różniczkowania wolno przedstawiać ze znakiem sumy; muszą jednak być spełnione założenia, że szereg (40.1) czyli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} F_n(\lambda)$$

jest jednostajnie zbieżny w rozważanym przedziale i że szereg (40.5) czyli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\lambda)$$

jest zbieżny. Mamy więc następujące twierdzenie o różniczkowaniu szeregów:

Jeżeli szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\lambda),$$

którego wyrazy są funkcjami o pochodnych ciągłych w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$, jest zbieżny choć w jednym punkcie a tego przedziału i jeżeli szereg pochodnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} F_n(\lambda)$$

jest jednostajnie zbieżny w $[\lambda_1, \lambda_2]$, to zachodzi wzór

$$(40.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} F_n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\lambda).$$

Przykład.

$$(40.7) \quad \frac{d}{d\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \right) = -\frac{\pi}{\lambda_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Szereg różniczkowany jest tu zbieżny jednostajnie w dowolnym przedziale, lecz rachunek jest ważny dla każdego przedziału $[\lambda_1, \lambda_2]$ zamkniętego, nie zawierającego punktów $2k\lambda_0$ (k całkowite), gdyż w takich przedziałach szereg pochodnych jest jednostajnie zbieżny. Stąd wynika, że równość zachodzi dla wszystkich $\lambda \neq 2k\lambda_0$.

W praktyce przydatne jeszcze jest twierdzenie o całkowaniu szeregów w następującej postaci:

Niech

$$(40.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda)$$

będzie szeregiem funkcji, które są ograniczone w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$ i ciągle z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów β_1, \dots, β_k . Wówczas wzór

$$(40.9) \quad \int_a^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^\lambda f_n(t) dt \quad (a \text{ i } \lambda \text{ należą do } [\lambda_1, \lambda_2])$$

jest prawdziwy, o ile są spełnione następujące warunki:

(I) dany szereg (40.8) jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale zamkniętym zawartym w $[\lambda_1, \lambda_2]$ i nie zawierającym punktów β_1, \dots, β_k ;

(II) szereg scałkowany (po prawej stronie wzoru (40.9)) jest zbieżny jednostajnie w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Dowód. Z założenia o funkcjach $f_n(\lambda)$ wynika, że dla $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ istnieje całki

$$F_n(\lambda) = \int_a^\lambda f_n(t) dt;$$

całki te są funkcjami ciągłymi w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$. Przy założeniach (I) i (II) zachodzi wzór (40.6) w każdym przedziale zamkniętym, zawartym w $[\lambda_1, \lambda_2]$ i nie zawierającym punktów β_1, \dots, β_k . W konsekwencji wzór (40.6) zachodzi dla wszystkich λ z przedziału $[\lambda_1, \lambda_2]$ z wyjątkiem punktów β_1, \dots, β_k . Wzór ten można też napisać w postaci

$$(40.10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^\lambda f_n(t) dt \quad (\lambda \neq \beta_1).$$

Z założenia (II) wynika, że szereg po prawej stronie wzoru jest funkcją ciągłą dla wszystkich λ z przedziału $[\lambda_1, \lambda_2]$; po scałkowaniu tego wzoru otrzymujemy więc równość (40.9)¹⁾ i dowód jest zakończony.

Przykład. Jeżeli funkcja φ_3 jest określona wzorem (39.5), to mamy

$$(40.11) \quad \begin{aligned} \int_0^\lambda \varphi_3(t) dt &= \frac{4\lambda_0}{\pi} \int_0^\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{\lambda_0} dt = \\ &= \frac{4\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\lambda \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{\lambda_0} dt = \\ &= \frac{4\lambda_0^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{4\lambda_0^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi\lambda}{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Równość ta zachodzi przy wszelkich λ rzeczywistych, gdyż szereg całkowany jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale zamkniętym, nie zawierającym punktów $k\lambda_0$ (k całkowite), szereg zaś otrzymany po scałkowaniu jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale.

¹⁾ Wynika to z twierdzenia ogólnego, że jeżeli $\varphi(\lambda)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$ z wyjątkiem co najwyżej punktów β_1, \dots, β_k , a $\psi(\lambda)$ funkcją ciągłą w całym przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$, to z równości $\varphi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \psi(\lambda)$ (dla $\lambda \neq \beta_1, \dots, \beta_k$) wynika, że $\int_a^\lambda \varphi(t) dt = \psi(\lambda)$ ($\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$). Twierdzenie to byłoby fałszywe, gdyby nie założyć ciągłości $\psi(\lambda)$ w całym przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Przykład ten wykorzystamy jeszcze do wyprowadzenia pewnych związków, które będą nam potrzebne w dalszym ciągu. Mianowicie mamy wobec wzoru (39.6)

$$\int_0^{\lambda_0/2} \varphi_3(t) dt = \frac{\lambda_0^2}{2}.$$

Podstawiając $\lambda = \frac{\lambda_0}{2}$ w równości (40.11) będziemy więc mieli

$$\frac{\lambda_0^2}{2} = \frac{4\lambda_0^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

a stąd

$$(40.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Podstawiając (40.12) do wzoru (40.11), otrzymujemy

$$\int_0^{\lambda} \varphi_3(t) dt = \frac{\lambda_0^2}{2} - \frac{4\lambda_0^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi\lambda}{\lambda_0},$$

a wobec (39.6)

$$(40.13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi\lambda}{\lambda_0} = \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{2\lambda}{\lambda_0}\right) \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

Ze wzoru tego skorzystamy w paragrafie 45.

Wzór (40.12) znalazł Euler. Warto jeszcze zauważyć, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

skąd wynika

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Wzór ten również podał Euler.

§ 41. Zmiany temperatury w pręcie przy danej temperaturze początkowej

Przypuśćmy, że rozkład temperatury w pręcie o długości λ_0 dany jest w chwili $t=0$ przez funkcję

$$x(\lambda, 0) = \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0),$$

gdzie n jest liczbą naturalną, i że obojda końce pręta utrzymujemy stale w temperaturze 0

$$x(0, t) = 0, \quad x(\lambda_0, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Ponieważ teraz

$$\{x_t(\lambda, t)\} = s\{x(\lambda, t)\} - \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0},$$

więc odpowiadające temu przypadkowi równanie operatorowe będzie niejednorodne

$$(41.1) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2 \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0};$$

równanie to należy rozwiązać przy warunkach brzegowych

$$(41.2) \quad x(0) = 0, \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Zagadnienie jest formalnie podobne do tego, które rozwiązaliśmy w paragrafie 24 dla struny drgającej. Rozwiążemy je w podobny sposób, szukając funkcji postaci

$$(41.3) \quad x(\lambda) = c \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0},$$

która spełniałaby równanie (41.1).

Podstawiając (41.3) do (41.1) znajdujemy po uproszczeniu przez $-\sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$

$$c \frac{n^2\pi^2}{\lambda_0^2} + c\alpha^2 s = \alpha^2,$$

a stąd

$$c = \frac{1}{s + n^2\beta^2} = \{\exp(-n^2\beta^2 t)\},$$

gdzie $\beta = \frac{\pi}{\alpha\lambda_0}$.

Przy tak dobranym współczynniku c funkcja (41.3) spełnia równanie (41.1); jednocześnie spełnia warunki (41.2). Zatem rozkład temperatury w przęcie określony jest wzorem

$$x(\lambda, t) = \exp(-n^2 \beta^2 t) \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Widać stąd, że w każdej chwili t krzywa rozkładu temperatury jest sinusoidą; amplituda tej sinusoidy dąży bardzo szybko do zera.

Jeżeli początkowy rozkład temperatury dany jest przez następującą funkcję:

$$x(\lambda, 0) = \sum_{n=1}^k \mu_n \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0),$$

to równanie operatorowe będzie miało postać

$$x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2 \sum_{n=1}^k \mu_n \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Pozostawiając warunki (41.2) bez zmiany, będziemy mieli rozwiązanie w postaci sumy

$$x(\lambda) = \sum_{n=1}^k \frac{\mu_n}{s + n^2 \beta^2} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Przypuśćmy wreszcie, że początkowy rozkład temperatury dany jest przez funkcję

$$x(\lambda, 0) = \varphi(\lambda),$$

która jest ciągła w przedziale zamkniętym i daje się wewnątrz tego przedziału rozwinąć w szereg trygonometryczny

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 < \lambda < \lambda_0).$$

Szereg ten jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$ zawartym w $(0, \lambda_0)$.

Równanie operatorowe ma postać

$$(41.4) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2 \varphi(\lambda).$$

Jeżeli warunki (41.2) pozostawimy bez zmiany, to formalne rozwiązanie będzie miało również postać szeregu nieskończonego

$$(41.5) \quad x(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{s + n^2 \beta^2} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Pisząc to rozwiązanie w zwykłej, nie operatorowej postaci, mamy

$$x(\lambda, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 \lambda_0^2} t\right) \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Widać stąd w szczególności, że przy $t \rightarrow \infty$ temperatura przęta wyrównuje się wszędzie bardzo szybko do zera.

§ 42. Sprawdzenie poprawności rozwiązania

Łatwo udowodnić, że ciąg μ_n jest zbieżny do zera. Istotnie, wobec jednostajnej zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}$ istnieje taki ciąg $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ zbieżny do zera, że

$$(42.1) \quad \left| \mu_n \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \right| \leq \gamma_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

dla wszystkich λ z przedziału (λ_1, λ_2) . Dla każdego n dość dużego można znaleźć taką wartość λ z przedziału (λ_1, λ_2) , że $\sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} = 1$; dla tej wartości λ nierówność (42.1) sprowadza się do $|\mu_n| \leq \gamma_n$, skąd wynika, że ciąg μ_n jest zbieżny do zera.

Szereg (41.5) można przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= \frac{s^2}{\beta^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^4} \left(\frac{n^2 \beta^2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s + n^2 \beta^2} \right) \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} = \\ &= \alpha^2 s^2 \{ \Phi(\lambda, t) \}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(42.2) \quad \Phi(\lambda, t) = \frac{\lambda_0^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^2} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} - \frac{\alpha^2 \lambda_0^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^4} (1 - e^{-n^2 \beta^2 t}) \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Ponieważ ciąg μ_n jest zbieżny do zera, obydwa szeregi występujące we wzorze (42.2) są jednostajnie zbieżne w całym obszarze

$$D(0 \leq \lambda \leq \lambda_0, 0 \leq t < \infty)$$

i funkcja (42.2) jest w tym obszarze ciągła. Stąd wynika, że szereg (41.5) jest operatorowo zbieżny w przedziale $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ i przedstawia w tym przedziale funkcję operatorową ciągłą.

Przez formalne dwukrotne zróżniczkowanie szeregu (42.2) względem λ znajdujemy

$$(42.3) \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Phi(\lambda, t) = -t \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 \lambda_0^2}{\pi^2} \frac{\mu_n}{n^2} (1 - e^{-n^2 \beta^2 t}) \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Pierwszy z szeregów w (42.3) jest z założenia zbieżny do $\varphi(\lambda)$ jednostajnie w każdym przedziale $[\lambda_1, \lambda_2]$ zawartym w $(0, \lambda_0)$, drugi zaś szereg jest jednostajnie zbieżny w obszarze D do pewnej funkcji $\psi(\lambda, t)$, ciągłej w tym obszarze. Mamy więc na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych

$$(42.4) \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Phi(\lambda, t) = -t\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, t)$$

w obszarze

$$D'(0 < \lambda < \lambda_0, 0 \leq t < \infty).$$

Ponieważ prawa strona wzoru (42.4) przedstawia funkcję ciągłą w całym obszarze D , przeto wzór (42.4) zachodzi w całym tym obszarze.

Wynika to z dwukrotnego zastosowania następującego prostego lematu:

Jeżeli pochodna $f'(\lambda)$ funkcji $f(\lambda)$ (liczbowej), ciągłej w przedziale $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, istnieje w przedziale $0 < \lambda < \lambda_0$ i jest w nim równa pewnej funkcji $g(\lambda)$, ciągłej w przedziale $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, to pochodna $f'(\lambda)$ istnieje również w przedziale $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ i jest w nim równa $g(\lambda)$.

Lemat ten wynika od razu z twierdzenia Rolle'a, gdyż

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(\xi) = g(\xi) \quad (0 < \xi < h),$$

skąd $f'(0) = g(0)$. Zupełnie podobnie znajdujemy $f'(\lambda_0) = g(\lambda_0)$.

Można napisać

$$\begin{aligned} \{\psi(\lambda, t)\} &= \frac{\alpha^2 \lambda_0^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + n^2 \beta^2} \right) \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} = \\ &= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{s + n^2 \beta^2} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{s} x(\lambda), \end{aligned}$$

skąd

$$x''(\lambda) = \alpha^2 s^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Phi(\lambda, t) \right\} = \alpha^2 s^2 \{-t\varphi(\lambda) + \psi(\lambda, t)\} = -\alpha^2 \varphi(\lambda) + \alpha^2 s x(\lambda).$$

W ten sposób sprawdziliśmy, że szereg (41.5) jest faktycznym rozwiązaniem równania (41.4), spełniającym warunki (41.2).

§ 43. Pewne przypadki szczególne

Dla $0 < \lambda < \lambda_0$ mamy

$$\lambda_0 - \lambda = \frac{2\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0};$$

stąd wynika na podstawie paragrafu 41, że rozwiązaniem $x_1(\lambda)$ równania operatorowego

$$(43.1) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2 (\lambda_0 - \lambda)$$

spełniającym warunki

$$(43.2) \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(\lambda_0) = 0$$

jest funkcja

$$(43.3) \quad x_1(\lambda) = \frac{2\lambda_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(s + n^2 \beta^2)} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0} \quad \left(\beta = \frac{\pi}{\alpha \lambda_0} \right).$$

Łatwo zauważyć, że funkcja

$$(43.4) \quad x_2(\lambda) = \frac{1}{s} (\lambda_0 - \lambda)$$

również spełnia równanie (43.1), lecz w miejsce (43.2) spełnia warunki

$$x_2(0) = \frac{\lambda_0}{s} \quad \text{i} \quad x_2(\lambda_0) = 0.$$

Stąd wynika, że funkcja $x(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0} [x_2(\lambda) - x_1(\lambda)]$ spełnia równanie jednorodne

$$x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = 0$$

z warunkami

$$x(0) = \frac{1}{s} \quad \text{i} \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Ale to ostatnie zagadnienie rozwiązaliśmy już w paragrafie 35 i wykazaliśmy, że znalezione tam rozwiązanie $G(\lambda)$ jest jedyne. Stąd wynika, że $G(\lambda) = x(\lambda)$. Wobec wzorów (43.3) i (43.4) znajdujemy dla $G(\lambda)$ inne niż w paragrafie 35 rozwinięcie

$$G(\lambda) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(s + n^2 \beta^2)} \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

W konsekwencji mamy też

$$(43.5) \quad G(\lambda, t) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{\alpha^2 \lambda_0^2} \right) \sin \frac{n\pi\lambda}{\lambda_0};$$

wzór ten nadaje się do rachunków praktycznych szczególnie wtedy, gdy t jest duże; wtenczas bowiem szereg jest bardzo szybko zbieżny. Gdy zaś t jest bliskie zera, to wygodniejszy jest wzór (35.1).

§ 44. Pręt jednostronnie izolowany

Jeżeli początkowy rozkład temperatury w pręcie dany jest przez funkcję

$$x(\lambda, 0) = \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 < \lambda < \lambda_0, n \text{ całkowite}),$$

to równanie operatorowe ma postać

$$(44.1) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2 \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Szukając rozwiązania kształtu

$$x(\lambda) = c \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0},$$

podstawiamy to wyrażenie do (44.1) i upraszczamy otrzymaną równość przez $-\sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0}$. Znajdujemy w ten sposób

$$c \frac{(n - \frac{1}{2})^2 \pi^2}{\lambda_0^2} + c \alpha^2 s = \alpha^2,$$

skąd $c = \frac{1}{s + (n - \frac{1}{2})^2 \beta^2}$, gdzie $\beta = \frac{\pi}{\alpha \lambda_0}$. Szukane rozwiązanie ma więc postać

$$x(\lambda) = \frac{1}{s + (n - \frac{1}{2})^2 \beta^2} \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0};$$

spełnia ono warunki brzegowe

$$(44.2) \quad x(0) = 0 \quad \text{i} \quad x'(\lambda_0) = 0.$$

Rozwiążmy teraz to samo zagadnienie, zakładając, że początkowy rozkład temperatury w pręcie jest dowolny

$$x(\lambda, 0) = \varphi(\lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0);$$

o funkcji $\varphi(\lambda)$ założymy jedynie, że jest ciągła w przedziale $[0, \lambda_0]$ i że daje się wewnątrz tego przedziału rozwinąć w szereg

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 < \lambda < \lambda_0),$$

który jest zbieżny do $\varphi(\lambda)$ jednostajnie w każdym przedziale zamkniętym $[\lambda_1, \lambda_2]$, zawartym w $(0, \lambda_0)$.

Równanie operatorowe ma postać

$$x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2 \varphi(\lambda).$$

Jeżeli warunki brzegowe pozostawimy bez zmiany, to rozwiązanie będzie miało postać szeregu nieskończonego

$$x(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{s + (n - \frac{1}{2})^2 \beta^2} \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0},$$

a w zwykłej symbolice

$$x(\lambda, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \exp\left(-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{\alpha^2 \lambda_0^2} t\right) \sin \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0};$$

zbadanie zbieżności tego szeregu i jego pochodnych można przeprowadzić tak samo jak w paragrafie 43.

Wobec wzorów (39.5) i (39.6) mamy

$$1 = \frac{1}{\lambda_0} \varphi_3\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \sin \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0} \quad (0 < \lambda < 2\lambda_0);$$

szereg ten jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale zamkniętym, zawartym w $(0, 2\lambda_0)$.

Zatem rozwiązanie równania

$$(44.3) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\frac{\alpha}{s} - \alpha^2,$$

spełniające warunki (44.2), ma w przedziale $0 < \lambda \leq \lambda_0$ postać

$$x_1(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{s + (n-\frac{1}{2})^2 \beta^2} \sin \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0}.$$

Z drugiej strony funkcja

$$x_2(\lambda) = \frac{1}{s}$$

spełnia również równanie różniczkowe (44.3) lecz z innymi warunkami brzegowymi, a mianowicie

$$x_2(0) = \frac{1}{s} \quad \text{i} \quad x_2'(\lambda_0) = 0.$$

Stąd wynika, że funkcja $x(\lambda) = x_2(\lambda) - x_1(\lambda)$, to jest funkcja

$$(44.4) \quad x(\lambda) = \frac{1}{s} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{s + (n-\frac{1}{2})^2 \beta^2} \sin \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0}$$

spełnia równanie *jednorodne*

$$(44.5) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = 0.$$

z warunkami

$$x(0) = \frac{1}{s} \quad \text{i} \quad x'(\lambda_0) = 0.$$

Pisząc (44.4) w zwykłej, nie operatorowej postaci, mamy

$$x(\lambda, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{\alpha^2 \lambda_0^2} t\right) \sin \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0};$$

funkcja ta przedstawia zmiany temperatury w pręcie, który w chwili $t=0$ miał wszędzie temperaturę 0 i którego początek $\lambda=0$ nagrzewamy stale do temperatury 1, izolując jednocześnie koniec $\lambda=\lambda_0$. Widać, że po upływie dłuższego czasu temperatura całego pręta bardzo niewiele różni się od 1.

Ćwiczenia. 1. Pokazać, że funkcja

$$(44.6) \quad X(\lambda) = \operatorname{svx}(\lambda),$$

gdzie $x(\lambda)$ jest określone wzorem (44.4), spełnia równanie (44.5) z warunkami brzegowymi

$$X(0) = v, \quad X'(\lambda_0) = 0.$$

Podać interpretację fizyczną.

2. Napisać funkcję (44.6) w zwykłej, nie operatorowej postaci.

§ 45. Jednostronnie regulowany dopływ ciepła

Przypuśćmy teraz, że początkowy rozkład temperatury w pręcie dany jest przez funkcję

$$x(\lambda, 0) = \cos \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0} \quad (0 < \lambda < \lambda_0, \quad n \text{ całkowite});$$

wtedy mamy równanie operatorowe

$$x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2 \cos \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0}.$$

Podobnie jak poprzednio widzimy, że funkcja

$$x(\lambda) = \frac{1}{s + (n-\frac{1}{2})^2 \beta^2} \cos \frac{(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda}{\lambda_0}$$

jest rozwiązaniem tego równania, takim że

$$(45.1) \quad x'(0) = 0 \quad \text{i} \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Przy tych samych warunkach brzegowych (45.1) rozwiążemy teraz równanie

$$(45.2) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = -\alpha^2(\lambda_0 - \lambda).$$

Zastępując we wzorze (40.13) λ przez $\frac{\lambda}{2}$ mamy

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0} = \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right),$$

a stąd

$$\lambda_0 - \lambda = \frac{2\lambda_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0};$$

wobec tego szukane rozwiązanie można napisać w postaci szeregu nieskończonego

$$x_1(\lambda) = \frac{2\lambda_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \frac{1}{s + (n-\frac{1}{2})^2\beta^2} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0} \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

Z drugiej strony funkcja

$$x_2(\lambda) = \frac{\lambda_0 - \lambda}{s}$$

spełnia równanie różniczkowe (45.2) z warunkami

$$x_2'(0) = -\frac{1}{s} \quad \text{i} \quad x_2(\lambda_0) = 0.$$

Stąd wynika, że funkcja $x(\lambda) = x_2(\lambda) - x_1(\lambda)$ czyli funkcja

$$(45.3) \quad x(\lambda) = \frac{\lambda_0 - \lambda}{s} - \frac{2\lambda_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \frac{1}{s + (n-\frac{1}{2})^2\beta^2} \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0}$$

spełnia równanie jednorodne

$$(45.4) \quad x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = 0$$

z warunkami brzegowymi

$$x'(0) = -\frac{1}{s}, \quad x(\lambda_0) = 0.$$

Pisząc funkcję (45.3) w zwykłej, nie operatorowej postaci, mamy

$$x(\lambda, t) = \lambda_0 - \lambda - \frac{2\lambda_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \exp\left(-\frac{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}{\alpha^2\lambda_0^2} t\right) \cos \frac{(n-\frac{1}{2})\pi\lambda}{\lambda_0}.$$

Funkcja ta przedstawia zmiany temperatury w przecie, w którym dopływ ciepła przez punkt $\lambda=0$ jest stale tak regulowany, że wynosi 1:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} x(\lambda, t)\right]_{\lambda=0} = 1,$$

koniec zaś $\lambda=\lambda_0$ jest stale utrzymywany w temperaturze 0; w chwili $t=0$ cały pręt ma temperaturę 0.

Ćwiczenia. 1. Pokazać, że funkcja

$$(45.5) \quad X(\lambda) = -sx(\lambda),$$

gdzie $x(\lambda)$ jest określone wzorem (45.3), spełnia równanie (45.4) z warunkami brzegowymi

$$X'(0) = v, \quad X(\lambda_0) = 0.$$

Podać interpretację fizyczną.

2. Napisać funkcję (45.5) w zwykłej, nie operatorowej postaci.

§ 46. Ogólniejsze zagadnienia brzegowe

Przypuśćmy, że dla rozwiązań równania cząstkowego

$$x_{\lambda\lambda} = \alpha^2 x_t \quad (\alpha > 0)$$

zadany jest warunek

$$(46.1) \quad x(\lambda, 0) = 0 \quad (\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2).$$

Jeżeli równanie rozważamy w obszarze określonym przez nierówności $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, $0 \leq t < \infty$, to ogólne warunki brzegowe można podać w jednej z 4 postaci

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x(\lambda_1, t) = v_1(t), & x(\lambda_2, t) = v_2(t); \\ \text{(II)} \quad & x_{\lambda}(\lambda_1, t) = v_1(t), & x(\lambda_2, t) = v_2(t); \\ \text{(III)} \quad & x(\lambda_1, t) = v_1(t), & x_{\lambda}(\lambda_2, t) = v_2(t); \\ \text{(IV)} \quad & x_{\lambda}(\lambda_1, t) = v_1(t), & x(\lambda_2, t) = v_2(t). \end{aligned} \quad (0 < t < \infty)$$

Można by rozważać warunki jeszcze ogólniejsze, ale ich omawiać tu nie będziemy.

Jeżeli wykonamy podstawienie

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\alpha^2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \quad \text{i} \quad \bar{x}(\bar{\lambda}, \bar{t}) = x(\lambda, t),$$

to będziemy mieli

$$x_{\lambda\lambda} = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \bar{x}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}}, \quad x_t = \frac{1}{\alpha^2(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \bar{x}_{\bar{t}}.$$

Widać, że funkcja $\bar{x}(\bar{\lambda}, \bar{t})$ spełniać będzie równanie

$$\bar{x}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}} = \bar{x}_{\bar{t}}$$

i warunek

$$\bar{x}(\bar{\lambda}, 0) = 0 \quad (0 \leq \bar{\lambda} \leq 1).$$

Zagadnienie uprościło się w ten sposób, gdyż w równaniu odpadł czynnik α^2 , przedział zaś $[\lambda_1, \lambda_2]$ został zastąpiony przez $[0, 1]$. Jeżeli dalej przyjmiemy oznaczenia $v_1(t) = \bar{v}_1(\bar{t})$ i $v_2(t) = \bar{v}_2(\bar{t})$, to warunek (I) przyjmie postać

$$\bar{x}(0, \bar{t}) = \bar{v}_1(\bar{t}), \quad \bar{x}(1, \bar{t}) = \bar{v}_2(\bar{t}) \quad (0 < \bar{t} < \infty);$$

analogicznie można wypisać warunki pozostałe.

Uciążliwe dopisywanie kresek nad literami pominiemy w dalszym ciągu.

Będziemy więc po prostu mówić o rozwiązaniach równania

$$(46.2) \quad x_{\lambda\lambda} = x_t \quad (0 \leq \lambda \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty),$$

spełniających warunek

$$(46.3) \quad x(\lambda, 0) = 0 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

i jeden z czterech warunków

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x(0, t) = v_1(t), \quad x(1, t) = v_2(t); \\ \text{(II)} \quad & x_{\lambda}(0, t) = v_1(t), \quad x(1, t) = v_2(t); \\ \text{(III)} \quad & x(0, t) = v_1(t), \quad x_{\lambda}(1, t) = v_2(t); \\ \text{(IV)} \quad & x_{\lambda}(0, t) = v_1(t), \quad x_{\lambda}(1, t) = v_2(t). \end{aligned}$$

Zagadnienie bez parametrów α , λ_1 i λ_2 jest tylko pozornie mniej ogólne; można od niego zawsze wrócić do zagadnienia z parametrami przez odpowiednią zmianę zmiennych.

Równanie (46.2) przy warunku (46.3) przechodzi w równanie operatorowe

$$(46.4) \quad x'' = sx \quad (0 \leq \lambda \leq 1);$$

warunki (I)–(IV) można wtedy napisać w postaci

$$(46.5) \quad \begin{aligned} \text{(I)} \quad & x(0) = v_1, \quad x(1) = v_2; \\ \text{(II)} \quad & x'(0) = v_1, \quad x(1) = v_2; \\ \text{(III)} \quad & x(0) = v_1, \quad x'(1) = v_2; \\ \text{(IV)} \quad & x'(0) = v_1, \quad x'(1) = v_2. \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcje hiperboliczne

$$\operatorname{sh} \lambda \sqrt{s} = \frac{1}{2}(e^{\lambda \sqrt{s}} - e^{-\lambda \sqrt{s}}) \quad \text{i} \quad \operatorname{ch} \lambda \sqrt{s} = \frac{1}{2}(e^{\lambda \sqrt{s}} + e^{-\lambda \sqrt{s}})$$

i oznaczenia

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \frac{\operatorname{sh} \lambda \sqrt{s}}{s \operatorname{sh} \sqrt{s}}, & G_2(\lambda) &= \frac{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{s}}{s \operatorname{ch} \sqrt{s}}, \\ G_3(\lambda) &= \frac{\operatorname{sh} \lambda \sqrt{s}}{\sqrt{s^3} \operatorname{ch} \sqrt{s}}, & G_4(\lambda) &= \frac{\operatorname{ch} \lambda \sqrt{s}}{\sqrt{s^3} \operatorname{sh} \sqrt{s}}, \end{aligned}$$

można łatwo sprawdzić, że funkcje

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= v_1 \cdot s G_1(1 - \lambda) + v_2 \cdot s G_1(\lambda), \\ x_2(\lambda) &= -v_1 \cdot s G_3(1 - \lambda) + v_2 \cdot s G_2(\lambda), \\ x_3(\lambda) &= v_1 \cdot s G_2(1 - \lambda) + v_2 \cdot s G_3(\lambda), \\ x_4(\lambda) &= -v_1 \cdot s G_4(1 - \lambda) + v_2 \cdot s G_4(\lambda) \end{aligned}$$

spełniają równanie (46.4) i odpowiednio warunki (46.5).

Ostatecznie więc wszystkie omawiane w tym paragrafie zagadnienia można sprowadzić do funkcji G_1 , G_2 , G_3 i G_4 .

Funkcje G_1 , G_2 , G_3 i G_4 spełniają równanie

$$x''(\lambda) = sx(\lambda)$$

i warunki

$$\begin{aligned} G_1(0) &= 0, & G_1(1) &= \frac{1}{s}; \\ G_2(0) &= 0, & G_2(1) &= \frac{1}{s}; \\ G_3(0) &= 0, & G_3(1) &= \frac{1}{s}; \\ G_4(0) &= 0, & G_4(1) &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Przy $\lambda > 0$ mamy rozwinięcia

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-(2n+1-\lambda)\sqrt{s}} - e^{-(2n+1+\lambda)\sqrt{s}}), \\ G_2(\lambda) &= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-(2n+1-\lambda)\sqrt{s}} + e^{-(2n+1+\lambda)\sqrt{s}}), \\ G_3(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{s^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-(2n+1-\lambda)\sqrt{s}} - e^{-(2n+1+\lambda)\sqrt{s}}), \\ G_4(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{s^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-(2n+1-\lambda)\sqrt{s}} + e^{-(2n+1+\lambda)\sqrt{s}}) \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{erf} \frac{2n+1-\lambda}{2\sqrt{t}} - \operatorname{erf} \frac{2n+1+\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \right\}, \\ G_2(\lambda) &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{erf} \frac{2n+1-\lambda}{2\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{2n+1+\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \right\}, \\ G_3(\lambda) &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\exp \frac{(2n+1-\lambda)^2}{-4t} - \exp \frac{(2n+1+\lambda)^2}{-4t} \right) \right\}, \\ G_4(\lambda) &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\exp \frac{(2n+1-\lambda)^2}{-4t} + \exp \frac{(2n+1+\lambda)^2}{-4t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (46.6)$$

Szeregi te są bardzo dobrze zbieżne dla małych wartości t . Natomiast dla dużych wartości t wygodniej jest używać szeregów

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \left\{ \lambda + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \exp(-n^2 \pi^2 t) \cdot \sin n \pi \lambda \right\}, \\ G_2(\lambda) &= \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \exp[-(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 t] \cdot \cos(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda \right\}, \\ G_3(\lambda) &= \left\{ \lambda + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \exp[-(n-\frac{1}{2})^2 \pi^2 t] \cdot \sin(n-\frac{1}{2}) \pi \lambda \right\}, \end{aligned} \quad (46.7)$$

rozwinięcia te można otrzymać ze wzorów (43.5), (44.4) i (45.3), podstawiając $\alpha=1$, $\lambda_0=1$ i zastępując λ przez $1-\lambda$.

Z rozwinięć (46.7) widać, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_1(\lambda, t) = \lambda, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G_2(\lambda, t) = 1 \quad \text{ i } \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G_3(\lambda, t) = \lambda;$$

natomiast z ostatniego z wzorów (46.6) widać, że

$$(46.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G_4(\lambda, t) = \infty.$$

Z (46.8) wynika, że funkcji G_4 nie da się przedstawić w postaci analogicznej do wzorów (46.7).

Znaczenie wzoru (46.8) ma prostą interpretację fizyczną. Jeżeli mianowicie przez jeden koniec pręta będzie dopływać stale ta sama ilość ciepła, drugi zaś koniec będzie izolowany tak, że ciepło nie będzie mogło odpływać, to temperatura całego pręta musi wzrastać do nieskończoności.

Uwaga. W przypadku, gdy warunek (46.1) jest zastąpiony przez ogólniejszy

$$x(\lambda, 0) = \varphi(\lambda) \quad (\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2)$$

można by przeprowadzić podobną dyskusję do podanej w tym paragrafie. Przypadku tego omawiać nie będziemy.

§ 47. Pierścień przewodzący ciepło

Zbadamy teraz, jak zmienia się temperatura w pierścieniu przewodzącym ciepło, gdy dany jest rozkład temperatury w chwili $t=0$. Założymy przy tym, że z zewnątrz nie ma żadnego dopływu ani odpływu ciepła.

Jeżeli długość pierścienia wynosi λ_0 , to rachunkowo możemy traktować go jako pręt o długości λ_0 i rozważać równanie

$$(47.1) \quad x''(\lambda) - a^2 s x(\lambda) = -a^2 \varphi(\lambda),$$

gdzie funkcja $\varphi(\lambda)$, określona w przedziale $[0, \lambda_0]$, przedstawia początkowy rozkład temperatury.

Założmy, że funkcja $\varphi(\lambda)$ rozwija się w szereg trygonometryczny

$$\varphi(\lambda) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_n \cos \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} + \beta_n \sin \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} \right)$$

zbieżny jednostajnie w przedziale $[0, \lambda_0]$.

Szukając rozwiązania również w postaci szeregu trygonometrycznego

$$x(\lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} + b_n \sin \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} \right),$$

znajdujemy taką samą metodą jak w paragrafach 41 i 44

$$a_n = \frac{\alpha_n}{s + 4n^2\beta^2}, \quad b_n = \frac{\beta_n}{s + 4n^2\beta^2} \quad \left(\beta = \frac{\pi}{\alpha\lambda_0} \right).$$

Wobec tego szukane rozwiązanie ma postać

$$x(\lambda) = \frac{a_0}{2s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s + 4n^2\beta^2} \left(\alpha_n \cos \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} + \beta_n \sin \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} \right)$$

lub w zwykłej symbolice

$$x(\lambda, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{4n^2\pi^2}{\alpha^2\lambda_0^2} t \right) \cdot \left(\alpha_n \cos \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} + \beta_n \sin \frac{2n\pi\lambda}{\lambda_0} \right).$$

Udowodnimy, że jest to jedyne rozwiązanie.

Istotnie, dla każdego rozwiązania muszą zachodzić warunki zgodności

$$x(0) = x(\lambda_0), \quad x'(0) = x'(\lambda_0) \quad \text{i} \quad x''(0) = x''(\lambda_0);$$

wobec tego każde rozwiązanie można przedłużyć periodycznie poza przedział $[0, \lambda_0]$. Ograniczymy się więc do omawiania periodycznych rozwiązań równania (47.1), zakładając, że funkcja $\varphi(\lambda)$ jest periodyczna o okresie λ_0 .

Przypuścimy, że równanie (47.1) ma dwa rozwiązania periodyczne $x_1(\lambda)$ i $x_2(\lambda)$. Wtedy różnica

$$x_0(\lambda) = x_1(\lambda) - x_2(\lambda)$$

spełnia równanie jednorodne

$$x''(\lambda) - \alpha^2 s x(\lambda) = 0$$

i wobec tego musi być postaci

$$x_0(\lambda) = c_1 e^{-\alpha\lambda\sqrt{s}} + c_2 e^{\alpha\lambda\sqrt{s}}.$$

Ale różnica ta również jest funkcją periodyczną i w szczególności musi być

$$x_0(0) = x_0(\lambda_0) = x_0(2\lambda_0)$$

czyli

$$(47.2) \quad c_1 + c_2 = c_1 e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}} + c_2 e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}} = c_1 e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}} + c_2 e^{2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}.$$

Rozwiązując ten układ równań znajdujemy

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Rozwiązanie układu (47.2) można przeprowadzić wygodnie przy pomocy wyznaczników, wprowadzając pomocniczą niewiadomą c_0 i pisząc

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 &= 0, \\ c_0 + c_1 e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}} + c_2 e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}} &= 0, \\ c_0 + c_1 e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}} + c_2 e^{2\alpha\lambda_0\sqrt{s}} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}} & e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}} \\ 1 & e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}} & e^{2\alpha\lambda_0\sqrt{s}} \end{vmatrix} = (e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}} - e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}})(e^{\alpha\lambda_0\sqrt{s}} - 1)(e^{-\alpha\lambda_0\sqrt{s}} - 1)$$

jest różny od zera, więc musi być $c_0 = c_1 = c_2 = 0$.

Stąd wynika, że jest tożsamościowo $x_0(\lambda) = 0$, co mieliśmy udowodnić.

§ 48. Operacja T^α i jej zastosowanie

W pewnych przypadkach można ułatwić rachunki przez wprowadzenie operacji T^α , którą definiujemy równością

$$T^\alpha a = T^\alpha \{a(t)\} = \{e^{at} a(t)\},$$

gdzie a może być dowolną liczbą zespoloną, a zaś dowolną funkcją klasy \mathcal{K} .

Łatwo zauważyć, że operacja T^α ma następujące własności:

$$(48.1) \quad T^\alpha T^\beta a = T^{\alpha+\beta} a, \quad T^\alpha(a+b) = T^\alpha a + T^\alpha b.$$

Ostatnia równość wyraża rozdzielność operacji T^α względem dodawania. Łatwo udowodnić, że ma ona również własność rozdzielności względem mnożenia

$$(48.2) \quad T^\alpha(a \cdot b) = T^\alpha a \cdot T^\alpha b.$$

Istotnie

$$T^\alpha(a \cdot b) = \left\{ e^{\alpha t} \int_0^t a(t-\tau) b(\tau) d\tau \right\} = \left\{ \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} a(t-\tau) \cdot e^{\alpha\tau} b(\tau) d\tau \right\} = T^\alpha a \cdot T^\alpha b.$$

Operację T^α uogólniamy na dowolne operatory $a = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{C}$), pisząc

$$T^\alpha a = \frac{T^\alpha p}{T^\alpha q}.$$

Łatwo sprawdzić, że własności (48.1) i (48.2) zachowują się przy dowolnych operatorach a i b .

W szczególności mamy dla operatora liczbowego γ

$$T^\alpha \gamma = \gamma,$$

gdyż

$$T^\alpha \gamma = T^\alpha \left\{ \frac{\gamma}{1} \right\} = \frac{\{e^{\alpha t} \gamma\}}{\{e^{\alpha t}\}} = \frac{\gamma \{e^{\alpha t}\}}{\{e^{\alpha t}\}} = \gamma;$$

ponadto jest wobec (48.2)

$$T^\alpha(\gamma a) = \gamma T^\alpha a,$$

$$T^\alpha \frac{1}{a} = \frac{1}{T^\alpha a}.$$

Dla operatora różniczkowego s mamy wzór

$$T^\alpha s = s - \alpha,$$

gdyż

$$T^\alpha s = T^\alpha \frac{1}{\{1\}} = \frac{1}{\{e^{\alpha t}\}} = s - \alpha.$$

Wobec wzoru (48.2) jest $T^\alpha s^2 = (T^\alpha s)^2 = (s - \alpha)^2$ i ogólniej $T^\alpha s^n = (s - \alpha)^n$. Jeżeli $R(s)$ jest dowolnym wyrażeniem wymiernym operatora s

$$R(s) = \frac{\alpha_m s^m + \dots + \alpha_0}{\beta_n s^n + \dots + \beta_0},$$

to

$$(48.3) \quad T^\alpha R(s) = R(s - \alpha).$$

W szczególności mamy na przykład

$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t\} = T^\alpha \{\cos \beta t\} = T^\alpha \frac{s}{s^2 + \beta^2} = \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2};$$

wzór ten wyprowadziliśmy inną drogą na stronie 30.

Zauważmy też, że wobec wzoru

$$\frac{1}{(s - \alpha)^\lambda} = \left\{ e^{\alpha t} \cdot \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\} \quad (\lambda > 0)$$

(zob. str. 105) mamy też

$$\frac{1}{(s - \alpha)^\lambda} = T^\alpha \frac{1}{s^\lambda}$$

i w szczególności

$$(48.4) \quad T^\alpha \sqrt{s} = \sqrt{s - \alpha}.$$

Na podstawie wzorów (48.2) i (48.4) jest na przykład

$$\begin{aligned} T^\alpha \sqrt{s^2 - \beta^2} &= T^\alpha \sqrt{s - \beta} \cdot T^\alpha \sqrt{s + \beta} = \sqrt{(s - \alpha) - \beta} \cdot \sqrt{(s - \alpha) + \beta} = \\ &= \sqrt{(s - \alpha)^2 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Udowodnimy jeszcze, że jeżeli funkcja $f(\lambda)$ ma pochodną operatorową, ciągłą w pewnym przedziale, to funkcja $T^\alpha f(\lambda)$ ma również pochodną operatorową ciągłą w tym przedziale i jest

$$(48.5) \quad [T^\alpha f(\lambda)]' = T^\alpha f'(\lambda).$$

Istotnie, jeżeli $f(\lambda) = q f_1(\lambda)$, gdzie $f_1(\lambda) = \{f_1(\lambda, t)\}$ jest funkcją parametryczną o ciągłej pochodnej cząstkowej względem λ , to

$$\begin{aligned} [T^\alpha f(\lambda)]' &= [T^\alpha q \cdot \{e^{\alpha t} \cdot f_1(\lambda, t)\}]' = T^\alpha q \cdot \left\{ e^{\alpha t} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t) \right\}' = \\ &= T^\alpha q \cdot T^\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t) \right\} = T^\alpha \left[q \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} f_1(\lambda, t) \right\} \right]' = T^\alpha f'(\lambda). \end{aligned}$$

Z (48.5) i z definicji funkcji wykładniczej wynika wzór

$$(48.6) \quad T^\alpha e^{\lambda w} = e^{\lambda T^\alpha w},$$

gdyż

$$\begin{aligned} [T^\alpha e^{\lambda w}]' &= T^\alpha (w e^{\lambda w}) = T^\alpha w \cdot T^\alpha e^{\lambda w}, \\ T^\alpha e^{0 \cdot w} &= T^\alpha 1 = 1. \end{aligned}$$

Wzory (48.3) i (48.4) łatwo można zapamiętać, zauważywszy, że wykonanie operacji T^α powoduje zastąpienie operatora s przez $s - \alpha$.

Korzystając z wyprowadzonych wzorów, łatwo też przekształcać bardziej skomplikowane wyrażenia, na przykład

$$T^{-\gamma} \frac{e^{-\alpha \lambda \sqrt{s}} - e^{-\alpha(2\lambda_0 - \lambda)\sqrt{s}}}{1 - e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s}}} = \frac{e^{-\alpha \lambda \sqrt{s+\gamma}} - e^{-\alpha(2\lambda_0 - \lambda)\sqrt{s+\gamma}}}{1 - e^{-2\alpha\lambda_0\sqrt{s+\gamma}}}.$$

Przy pomocy operacji T^α udowodnimy jeszcze kilka wzorów, z których później skorzystamy.

Weźmy najpierw wzory

$$(48.7) \quad \begin{aligned} e^{-\lambda \sqrt{s-a}} &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(\alpha t - \frac{\lambda^2}{4t}\right) dt, \\ \frac{1}{\sqrt{s-a}} e^{-\lambda \sqrt{s-a}} &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(\alpha t - \frac{\lambda^2}{4t}\right) dt; \end{aligned}$$

wynikają one z następującego prostego rachunku:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda \sqrt{s+a}} &= e^{-\lambda T^\alpha \sqrt{s}} = T^\alpha e^{-\lambda \sqrt{s}}, \\ \frac{1}{\sqrt{s-a}} e^{-\lambda \sqrt{s-a}} &= \frac{1}{T^\alpha \sqrt{s}} e^{-\lambda T^\alpha \sqrt{s}} = T^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\lambda \sqrt{s}} \right). \end{aligned}$$

Udowodnimy teraz, że przy dowolnym α zespolonym i β rzeczywistym dodatnim zachodzą wzory

$$(48.8) \quad \left\{ \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right\} = \frac{1}{s} e^{-2\alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+a^2}} - 1 \right) e^{-2\beta \sqrt{s+a^2}} + \frac{1}{s},$$

$$(48.9) \quad \left\{ \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) \right\} = \frac{1}{s} e^{2\alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+a^2}} + 1 \right) e^{-2\beta \sqrt{s+a^2}} - \frac{1}{s}.$$

Istotnie, pisząc

$$f(t) = \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha \sqrt{t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau,$$

mamy

$$f'(t) = e^{-2\alpha\beta} e^{-\alpha^2 t} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\beta^2}{t}} - \frac{\beta}{\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\beta^2}{t}} \right)$$

i

$$\begin{aligned} \{f'(t)\} &= e^{-2\alpha\beta} T^{-\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{s}} e^{-2\beta \sqrt{s}} - e^{-2\beta \sqrt{s}} \right) = \\ &= e^{-2\alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+a^2}} - 1 \right) e^{-2\beta \sqrt{s+a^2}}. \end{aligned}$$

Stąd wynika wzór (47.8), ponieważ $f(0+) = 1$.

Podobnie, pisząc

$$g(t) = \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha \sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau,$$

mamy

$$\{g'(t)\} = e^{2\alpha\beta} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{s+a^2}} + 1 \right) e^{-2\beta \sqrt{s+a^2}}$$

i stąd wzór (47.9), ponieważ $g(0+) = -1$.

Z (47.8) i (47.9) dostajemy z łatwością wzory

$$(48.10) \quad \frac{\alpha}{s \sqrt{s+a^2}} e^{-2\beta \sqrt{s+a^2}} = \left\{ \frac{1}{2} e^{-2\alpha\beta} \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{2\alpha\beta} \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) - \operatorname{sh} 2\alpha\beta \right\},$$

$$(48.11) \quad \frac{1}{s} e^{-2\beta \sqrt{s+a^2}} = \left\{ \frac{1}{2} e^{-2\alpha\beta} \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^{2\alpha\beta} \operatorname{erf} \left(\alpha \sqrt{t} + \frac{\beta}{\sqrt{t}} \right) - \operatorname{ch} 2\alpha\beta \right\}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić wzory

$$(\alpha) \quad T^{-1} \sqrt{s^2 - 3s + 2} = \sqrt{s^2 - s}; \quad (\beta) \quad T^1 \sqrt{s^2 + s + 1} = \sqrt{s^2 - s + 1};$$

$$(\gamma) \quad T^\alpha \sqrt{s^2 - 1} = \sqrt{(s-a)^2 - 1}.$$

(Wskazówka. Rozłóż wielomiany pod znakiem pierwiastka na czynniki liniowe.)

§ 49. Nieizolowany przewodnik ciepła

W paragrafach 31-47 zajmowaliśmy się przewodnictwem ciepła w pręcie lub pierścieniu przy założeniu, że przewodnik jest doskonale izolowany od otoczenia. Obecnie przyjmujemy, że pręt nie jest izolowany i że strata ciepła w każdym jego punkcie jest

proporcjonalna do różnicy temperatury między prętem a otoczeniem. Założymy ponadto, że temperatura otoczenia jest równa 0. Wówczas mamy równanie

$$x_{\lambda\lambda}(\lambda, t) - a^2 x_t'(\lambda, t) - \beta x(\lambda, t) = 0,$$

gdzie β jest odpowiednio dobranym współczynnikiem. Załóżmy jeszcze, że w chwili $t=0$ temperatura pręta jest równa 0. Wtedy równanie operatorowe ma postać

$$(49.1) \quad x''(\lambda) - (a^2 s + \beta)x(\lambda) = 0.$$

Założmy wreszcie, że początek pręta $\lambda=0$ jest utrzymywany w temperaturze $v=\{v(t)\}$, a jego koniec w temperaturze 0; odpowiadają temu warunki brzegowe

$$(49.2) \quad x(0) = v \quad \text{i} \quad x(\lambda_0) = 0.$$

W celu rozwiązania zagadnienia, szukamy najpierw funkcji wykładniczych $e^{\lambda w}$, spełniających równanie (49.1). Podstawiając $e^{\lambda w}$ do równania (49.1), znajdujemy po podzieleniu przez $e^{\lambda w}$

$$w^2 - (a^2 s + \beta) = 0,$$

a stąd

$$w = -a\sqrt{s+\gamma} \quad \text{lub} \quad w = a\sqrt{s+\gamma},$$

gdzie $\gamma = \frac{\beta}{a^2}$.

Istnieją więc dwie funkcje wykładnicze

$$e^{-a\lambda\sqrt{s+\gamma}} \quad \text{i} \quad e^{a\lambda\sqrt{s+\gamma}},$$

spełniające równanie (49.1). Stąd wynika, że wyrażenie

$$x(\lambda) = c_1 e^{-a\lambda\sqrt{s+\gamma}} + c_2 e^{a\lambda\sqrt{s+\gamma}}$$

jest ogólnym rozwiązaniem równania (49.1). Dostosowując je do warunków (48.2), znajdujemy podobnie jak w paragrafie 31

$$x(\lambda) = \frac{(e^{-a\lambda\sqrt{s+\gamma}} - e^{-a(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s+\gamma}})v}{1 - e^{-2a\lambda_0\sqrt{s+\gamma}}}.$$

Używając oznaczeń z paragrafu 48, można napisać

$$T^y x(\lambda) = \frac{(e^{-a\lambda\sqrt{s}} - e^{-a(2\lambda_0-\lambda)\sqrt{s}})v_0}{1 - e^{-2a\lambda_0\sqrt{s}}},$$

gdzie

$$v_0 = T^y v.$$

Widać, że funkcja operatorowa $y(\lambda) = T^y x(\lambda)$ ma tę samą postać co funkcja (31.8) na stronie 180. Można to było zresztą przewidzieć, zważywszy, że

$$y''(\lambda) = a^2 s y(\lambda)$$

i że

$$y(0) = v_0, \quad y(\lambda_0) = 0.$$

Gdy pręt jest bardzo długi, to można przyjąć, jak w paragrafie 37, że

$$y(\lambda) = v_0 e^{-a\lambda\sqrt{s}}$$

i wobec tego, że

$$(49.3) \quad x(\lambda) = v \cdot e^{-a\lambda\sqrt{s+\gamma}}.$$

W zwyczajnej postaci mamy stąd wzór

$$x(\lambda, t) = \frac{a\lambda}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t v(t-\tau) \tau^{-3/2} \exp\left(-\frac{\beta\tau}{a^2} - \frac{a^2\lambda^2}{4\tau}\right) d\tau.$$

W szczególności, gdy funkcja v jest stała

$$v = \frac{\omega}{s},$$

to rozwiązanie (49.3) można napisać w postaci

$$x(\lambda) = \frac{\omega}{s} e^{-a\lambda\sqrt{s+\gamma}}$$

lub wobec wzoru (48.11)

$$x(\lambda, t) = \frac{\omega}{2} \left[e^{-\lambda\sqrt{s}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\beta t}}{a} - \frac{a\lambda}{2\sqrt{t}}\right) - e^{\lambda\sqrt{s}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\beta t}}{a} + \frac{a\lambda}{2\sqrt{t}}\right) - 2 \operatorname{ch} 2\lambda\sqrt{\beta} \right].$$

Ta postać rozwiązania jest wygodna ze względu na możliwość użycia tablic funkcji erf.

ROZDZIAŁ VII

Funkcje Bessela

§ 50. Szeregi potęgowe operatorów

W paragrafach 15 i 35 mieliśmy już do czynienia z pewnymi szeregami potęgowymi operatorów $e^{-\lambda s}$ i $e^{-\lambda V^s}$. Ważne w zastosowaniach są szeregi potęgowe postaci

$$(50.1) \quad \Phi(\lambda w) = a_1 \lambda w + a_2 \lambda^2 w^2 + \dots,$$

gdzie a_1, a_2, \dots są współczynnikami liczbowymi (rzeczywistymi lub zespolonymi), w ustalonym operatorem, λ zaś zmienną liczbową (rzeczywistą lub zespoloną).

Jeżeli w szczególności $w=1$, to szereg (50.1) redukuje się do zwykłego szeregu potęgowego

$$(50.2) \quad \Phi(\lambda) = a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots$$

Przez promień zbieżności szeregu (50.2) rozumiemy liczbę ϱ o tej własności, że szereg jest zbieżny przy $|\lambda| < \varrho$ a rozbieżny przy $|\lambda| > \varrho$.

Udowodnimy, że jeżeli promień zbieżności szeregu (50.2) jest dodatni i jeżeli $w = \{w(t)\}$ jest funkcją klasy \mathcal{C} , to szereg (50.1) przedstawia funkcję parametryczną $\Phi(\lambda w) = \{\Phi(\lambda, t)\}$ i jest zbieżny jednostajnie w każdym obszarze określonym nierównościami

$$(50.3) \quad |\lambda| \leq \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Dowód. Oznaczmy przez M maksimum bezwzględnej wartości $w(t)$ w dowolnie ustalonym przedziale $0 \leq t \leq t_0$. Wprowadźmy ponadto następujące oznaczenie

$$w^n = \{w^n(t)\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Wtedy jest dla $0 \leq t \leq t_0$

$$|w^1(t)| \leq M,$$

$$|w^2(t)| = \left| \int_0^t w^1(t-\tau) w^1(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t M \cdot M d\tau = M^2 \frac{t}{1!},$$

$$|w^3(t)| = \left| \int_0^t w^1(t-\tau) w^2(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t M \cdot M^2 \frac{\tau}{1!} d\tau = M^3 \frac{t^2}{2!}$$

i ogólnie

$$|w^n(t)| \leq M^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \leq M^n \frac{t_0^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ponieważ ciąg $\left(\frac{2\lambda_0}{\varrho}\right)^n M^n \frac{t_0^{n-1}}{(n-1)!}$ dąży do zera, więc jest ograniczony pewną liczbą K . Wobec tego

$$|a_n \lambda^n w^n(t)| \leq \left| a_n \lambda^n M^n \frac{t_0^{n-1}}{(n-1)!} \right| = \left| \left(\frac{2\lambda_0}{\varrho}\right)^n M^n \frac{t_0^{n-1}}{(n-1)!} \cdot a_n \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n \right| \leq K |a_n| \left(\frac{\varrho}{2}\right)^n.$$

Zatem szereg

$$(50.4) \quad a_1 \lambda w(t) + a_2 \lambda^2 w^2(t) + \dots$$

ma w obszarze (50.3) majorantę liczbową

$$K \left[|a_1| \frac{\varrho}{2} + |a_2| \left(\frac{\varrho}{2}\right)^2 + \dots \right];$$

majoranta ta jest zbieżna, gdyż szereg (50.2) ma promień zbieżności ϱ . To zaś pociąga za sobą jednostajną zbieżność szeregu (50.4) w obszarze (50.3).

Zbieżność jednostajna w obszarze (50.3) jest oczywiście rozumiana w sensie klasycznej analizy. Z udowodnionego twierdzenia wynika, że szereg (50.1) jest operatorowo zbieżny dla każdego λ zespolonego. Stąd wynika dalej, że jeżeli promień zbieżności szeregu liczbowego

$$(50.5) \quad \psi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots$$

jest dodatni, to szereg

$$\psi(\lambda w) = a_0 + a_1 \lambda w + a_2 \lambda^2 w^2 + \dots,$$

gdzie $w = \{w(t)\} \in \mathcal{C}$, jest operatorowo zbieżny dla każdego λ zespolonego. Dodanie bowiem jednego wyrazu a_0 nie wpływa na zbieżność lub rozbieżność szeregu.

Przykłady. 1. Szereg

$$\frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$$

ma promień zbieżności równy 1. Szereg

$$\frac{1}{s-\lambda} = \frac{l}{1-\lambda l} = l(1 + \lambda l + \lambda^2 l^2 + \dots) = \left\{ 1 + \frac{\lambda l}{1!} + \frac{\lambda^2 l^2}{2!} + \dots \right\}$$

jest zbieżny dla wszystkich λ . Wynika też stąd wzór

$$\frac{1}{s-\lambda} = \{e^{\lambda l}\},$$

wyprowadzony innym sposobem na stronie 30.

2. Szereg

$$\cos \lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} - \dots$$

ma promień zbieżności $+\infty$. Stąd na przykład wynika, że szereg

$$\cos \frac{\lambda}{s^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{2!s^4} + \frac{\lambda^4}{4!s^8} - \dots$$

jest zbieżny dla wszystkich λ .

Twierdzenie, które udowodniliśmy, daje się uogólnić na funkcje klasy \mathcal{K} , a nawet na obszerniejsze klasy operatorów. Tutaj pokażemy jeszcze, że jeżeli szereg (50.5) ma dodatni promień zbieżności ϱ , to przy dowolnym $\beta > 0$ szereg

$$(50.6) \quad a_0 + a_1 \frac{\lambda}{s^\beta} + a_2 \frac{\lambda^2}{s^{2\beta}} + \dots$$

jest zbieżny dla wszystkich λ .

Dowód. Mamy równości

$$(50.7) \quad \frac{1}{s} \left(a_0 + a_1 \frac{\lambda}{s^\beta} + a_2 \frac{\lambda^2}{s^{2\beta}} + \dots \right) = a_0 \frac{1}{s} + a_1 \lambda \frac{1}{s^{1+\beta}} + a_2 \lambda^2 \frac{1}{s^{1+2\beta}} + \dots$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 \frac{\lambda l^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + a_2 \frac{\lambda^2 l^{2\beta}}{\Gamma(1+2\beta)} + \dots \right\}.$$

Ale dla każdej liczby $\gamma \geq 0$ jest

$$\Gamma(1+n\beta) = \int_0^\infty t^{n\beta} e^{-t} dt > \int_\gamma^{1+\gamma} t^{n\beta} e^{-t} dt > \int_\gamma^{1+\gamma} \gamma^{n\beta} e^{-1-\gamma} dt = \gamma^{n\beta} e^{-1-\gamma} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Jeżeli weźmiemy dowolnie ustaloną liczbę λ i dowolnie ustalony przedział $0 \leq t \leq t_0$, to przy $\gamma^\beta = \frac{2\lambda t_0}{\varrho}$ będziemy mieli

$$\left| \frac{\lambda^n t^{n\beta}}{\Gamma(1+n\beta)} \right| < e^{1+\gamma} \left(\frac{\varrho}{2} \right)^n.$$

Stąd wynika, że szereg (50.7) ma w przedziale $0 \leq t \leq t_0$ majorantę liczbową zbieżną, czyli że jest jednostajnie zbieżny.

Zatem szereg (50.6) jest operatorowo zbieżny przy każdym λ , gdyż λ_0 było ustalone dowolnie.

Ćwiczenie. Udowodnić wzory:

$$(\alpha) \quad \sin \frac{\lambda}{s} = \left\{ \frac{\lambda}{1!} - \frac{\lambda^3 t^2}{3!2!} + \frac{\lambda^5 t^4}{5!4!} - \dots \right\};$$

$$(\beta) \quad \ln(1 - \lambda e^{-2\sqrt{s}}) = - \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t^3}} \left(\lambda \exp \frac{1^2}{-t} + \lambda^2 \exp \frac{2^2}{-t} + \lambda^3 \exp \frac{3^2}{-t} + \dots \right) \right\}.$$

§ 51. Funkcje Bessela $J_0(t)$ i $J_1(t)$

Wzór Newtona dla dwumianu daje rozwinięcie

$$(51.1) \quad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \lambda^{2\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{2^{2\nu} (\nu!)^2} \lambda^{2\nu} \quad (|\lambda| < 1).$$

Zatem szereg

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 + (\lambda l)^2}} = l \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{2^{2\nu} (\nu!)^2} \lambda^{2\nu} l^{2\nu} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{2\nu} l^{2\nu}}{2^{2\nu} (\nu!)^2} \right\}$$

jest zbieżny dla wszystkich λ zespolonych. Wprowadzając oznaczenie

$$(51.2) \quad J_0(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu} (\nu!)^2},$$

możemy napisać

$$(51.3) \quad \frac{1}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} = \{J_0(\lambda l)\}.$$

Funkcję J_0 nazywamy *funkcją Bessela rzędu 0*. Wartości jej można obliczać wygodnie z rozwinięcia (51.2). W szczególności widać, że $J_0(0) = 1$.

Na podstawie wzoru (51.1) można też napisać

$$\frac{\sqrt{s^2 + \lambda^2} - s}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda l)^2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (2+2\nu)!}{2^{2+2\nu} (1+\nu)!} \lambda^{2+2\nu} l^{2+2\nu} =$$

$$= \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{2+2\nu} l^{2+2\nu}}{2^{2+2\nu} \nu! (1+\nu)!} \right\}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(51.4) \quad J_1(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu} \nu! (1+\nu)!}$$

mamy

$$(51.5) \quad \frac{\sqrt{s^2 + \lambda^2} - s}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} = \{\lambda J_1(\lambda l)\}.$$

Zauważmy, że wobec $J_0(0) = 1$ jest

$$\{J'_0(t)\} = s\{J_0(t)\} - 1 = \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} - 1 = -\frac{\sqrt{s^2 + 1} - s}{\sqrt{s^2 + 1}} = \{-J_1(t)\};$$

mamy więc związek

$$J'_0(t) = -J_1(t),$$

który można też sprawdzić przez różniczkowanie szeregu (51.2).

Zastępując we wzorach (51.2), (51.3), (51.4) i (51.5) λ przez $i\lambda$, mamy

$$J_0(i\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{2\nu} (\nu!)^2},$$

$$J_1(i\lambda) = i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{1+2\nu}}{2^{1+2\nu} \nu! (1+\nu)!},$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 - \lambda^2}} = \{J_0(i\lambda l)\},$$

$$\frac{\sqrt{s^2 - \lambda^2} - s}{\sqrt{s^2 - \lambda^2}} = \{i\lambda J_1(i\lambda l)\}.$$

§ 52. Pochodne szeregów potęgowych

Udowodnimy teraz, że jeżeli szereg potęgowy liczbowy

$$\psi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots$$

ma dodatni promień zbieżności, to pochodna funkcji

$$(52.1) \quad \psi(\lambda w) = a_0 + a_1 \lambda w + a_2 \lambda^2 w^2 + \dots,$$

gdzie $w = \{w(t)\} \in \mathcal{C}$, rozwija się w szereg potęgowy

$$[\psi(\lambda w)] = 1 a_1 w + 2 a_2 \lambda w^2 + \dots,$$

który jest zbieżny przy wszelkich zespolonych λ .

Dowód. Ponieważ pochodna stałej a_0 jest równa zeru, więc pominięcie jej nie zmienia ogólności twierdzenia. Dlatego w dowodzie można założyć, że $a_0 = 0$.

Wtedy szereg potęgowy

$$\psi(\lambda) = a_1 \lambda w + a_2 \lambda^2 w^2 + \dots$$

przedstawia funkcję parametryczną $\psi(\lambda w) = \{\psi(\lambda, t)\}$ i jest jednostajnie zbieżny (w zwykłym sensie) w każdym obszarze

$$(52.2) \quad |\lambda| \leq \lambda_0, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Podobnie szereg (52.1) przedstawia funkcję parametryczną i jest jednostajnie zbieżny w każdym obszarze (52.2). Wprowadzając oznaczenia

$$w^n = \{w^n(t)\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

można napisać

$$a_1 \lambda w + a_2 \lambda^2 w^2 + \dots = \{a_1 \lambda w^1(t) + a_2 \lambda^2 w^2(t) + \dots\},$$

$$a_1 w + 2 a_2 \lambda w^2 + \dots = \{a_1 w^1(t) + 2 a_2 \lambda w^2(t) + \dots\} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [a_1 \lambda w^1(t) + a_2 \lambda^2 w^2(t) + \dots] \right\},$$

skąd wynika

$$[a_1 \lambda w + a_2 \lambda^2 w^2 + \dots]' = a_1 w + 2 a_2 \lambda w^2 + \dots$$

A to dowodzi już twierdzenia. Cały sens dowodu polegał na wykorzystaniu twierdzenia o różniczkowaniu wyraz po wyrazie zwykłych szeregów potęgowych zmiennej λ , przy czym zmienna t występo-

wała jako parametr. Dzięki jednostajnej zbieżności rozważanych szeregów w obszarze (52.2) twierdzenie to przenosi się na szeregi operatorowe.

Jeżeli w szczególności

$$\psi(\lambda w) = 1 + \frac{\lambda w}{1!} + \frac{\lambda^2 w^2}{2!} + \dots,$$

to

$$[\psi(\lambda w)]' = w + \frac{\lambda w^2}{1!} + \frac{\lambda^2 w^3}{2!} + \dots = w\psi(\lambda w).$$

Ponieważ $\psi(0)=1$, więc na podstawie definicji funkcji wykładniczej mamy

$$(52.3) \quad e^{\lambda w} = 1 + \frac{\lambda w}{1!} + \frac{\lambda^2 w^2}{2!} + \dots$$

O ile więc $w \in \mathcal{C}$, to funkcja wykładnicza $e^{\lambda w}$ rozwija się na szereg potęgowy podobnie jak zwykła funkcja wykładnicza. Warto zauważyć, że w tym przypadku funkcja wykładnicza ma postać

$$e^{\lambda w} = 1 + f(\lambda),$$

gdzie $f(\lambda) = \{f(\lambda, t)\}$ jest funkcją parametryczną.

Uwaga. Również funkcja $e^{-\lambda \sqrt{s}}$ i wiele innych daje się rozwinąć na szereg potęgowy, lecz wykazanie zbieżności tych szeregów jest o wiele trudniejsze¹⁾. Za pomocą szeregów potęgowych nie można jednak podać ogólnej definicji funkcji wykładniczej, gdyż na przykład szereg dla funkcji $e^{-\lambda s}$ jest zbieżny²⁾.

Dla $w = -\frac{1}{s}$ rozwinięcie (1.3) jest w mocy, gdyż $-\frac{1}{s} = \{-1\} \in \mathcal{C}$.

Jest więc przy $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda/s} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n t^n}{n!} = s \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n t^{n+1}}{n!} = \\ &= s \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n t^n}{(n!)^2} \right\} = s \{J_0(2\sqrt{\lambda t})\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Ryll-Nardzewski [44].

²⁾ Mikusiński i Ryll-Nardzewski [38].

Stąd mamy wzór

$$\frac{1}{s} e^{-\lambda/s} = \{J_0(2\sqrt{\lambda t})\}.$$

Ćwiczenie. Udowodnić, że przy $\lambda \geq 0$ mamy wzory

$$(a) \quad \frac{1}{V_s} e^{-\lambda/s} = \left\{ \frac{1}{V_{\pi t}} \cos 2\sqrt{\lambda t} \right\};$$

$$(b) \quad \frac{1}{V_s} e^{\lambda/s} = \left\{ \frac{1}{V_{\pi t}} \operatorname{ch} 2\sqrt{\lambda t} \right\};$$

$$(c) \quad \frac{1}{s^2} e^{-\lambda/s} = \left\{ \sqrt{\frac{t}{\lambda}} J_1(2\sqrt{\lambda t}) \right\}.$$

§ 53. Funkcje Bessela $J_n(t)$ przy dowolnym n naturalnym

Dla każdego n naturalnego mamy rozwinięcie

$$(53.1) \quad (\sqrt{1+\lambda}-1)^n = n \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(n+2\nu-1)!}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!} \lambda^{n+\nu} \quad (|\lambda| < 1).$$

Wzór ten można udowodnić w następujący sposób. Pisząc

$$(53.2) \quad \varphi_n(\lambda) = (\sqrt{1+\lambda}-1)^n \quad (n=1, 2, \dots),$$

łatwo wyliczyć, że

$$\begin{aligned} \varphi'_{n+1}(\lambda) &= \frac{n+1}{2} \frac{(\sqrt{1+\lambda}-1)^n}{\sqrt{1+\lambda}}, \\ [\lambda^{-n/2} \varphi_n(\lambda)]' &= \frac{n}{2} \lambda^{-n/2-1} \frac{(\sqrt{1+\lambda}-1)^n}{\sqrt{1+\lambda}}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\varphi'_{n+1}(\lambda) = \frac{n+1}{n} \lambda^{n/2+1} [\lambda^{-n/2} \varphi_n(\lambda)]'$$

i

$$(53.3) \quad \varphi_{n+1}(\lambda) = \frac{n+1}{n} \int_0^{\lambda} \lambda^{n/2+1} [\lambda^{-n/2} \varphi_n(\lambda)]' d\lambda,$$

ponieważ z (53.2) widać, że $\varphi_n(0)=0$.

Ale z wzoru Newtona mamy

$$\varphi_1(\lambda) = \sqrt{1+\lambda}-1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(2\nu)!}{2^{1+2\nu} \nu! (1+\nu)!} \lambda^{1-\nu};$$

stosując więc wzór rekurencyjny (53.3) znajdujemy łatwo przez indukcję rozwinięcie (53.1).

Z wzoru (53.1) wynika, że

$$\begin{aligned} (\sqrt{s^2 + \lambda^2} - s)^n &= s^n (\sqrt{1 + \lambda^2 t^2} - 1)^n = \\ &= n \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(n+2\nu-1)!}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!} \lambda^{2(n+\nu)} t^{n+2\nu}, \end{aligned}$$

czyli

$$(53.4) \quad (\sqrt{s^2 + \lambda^2} - s)^n = \left\{ n \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{2(n+\nu)} t^{n+2\nu-1}}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!} \right\} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Jeżeli we wzorze (52.4) zastąpimy n przez $n+1$, następnie go różniczkujemy i podzielimy przez $(n+1)\lambda$, to otrzymamy

$$(53.5) \quad \frac{(\sqrt{s^2 + \lambda^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{2(n+\nu)} t^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!} \right\} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Wprowadzając funkcję Bessela rzędu n

$$(53.6) \quad J_n(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu} \nu! (n+\nu)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

możemy wzory (53.4) i (53.5) zapisać w postaci

$$(\sqrt{s^2 + \lambda^2} - s)^n = \left\{ \frac{n \lambda^n}{t} J_n(\lambda t) \right\} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\frac{(\sqrt{s^2 + \lambda^2} - s)^n}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} = \{ \lambda^n J_n(\lambda t) \} \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

wzory te są ważne przy wszelkich zespolonych λ .

§ 54. Funkcja $\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2})$ i jej pokrewne

Funkcja wykładnicza $\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2})$ daje się rozwinąć na szereg potęgowy

$$(54.1) \quad \exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2}) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (-\lambda)^{n+1} (\sqrt{s^2 + a^2} - s)^{n+1},$$

gdyż operator

$$s - \sqrt{s^2 + a^2} = - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\frac{1}{2}}{\nu} a^2 t^{2\nu-1}$$

jest elementem klasy \mathcal{C} .

Zastępując we wzorze (53.4) λ przez a , n przez $n+1$, a ν przez $\nu-n$, mamy

$$(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^{n+1} = \left\{ (-1)^n (n+1) \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^\nu a^{2+2\nu} t^{2\nu-n}}{2^{1+2\nu-n} (\nu-n)! (\nu+1)!} \right\},$$

podstawiając to wyrażenie do (54.1) i zmieniając kolejność sumowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2}) &= \\ (54.2) \quad &= 1 - \left\{ \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{a^{2+2\nu} t^\nu}{2^{1+2\nu} \nu! (\nu+1)!} \sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{\nu! \lambda^\kappa t^{\nu-\kappa}}{2^{-\kappa} (\nu-\kappa)! \kappa!} \right\} = \\ &= 1 - \left\{ \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{a^{2+2\nu} t^\nu}{2^{1+2\nu} \nu! (\nu+1)!} (t+2\lambda)^\nu \right\}. \end{aligned}$$

Wobec definicji (51.4) można wreszcie napisać

$$(54.3) \quad \exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2}) = 1 - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} a J_1(a \sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\}.$$

W ten sposób rozważaną funkcję wykładniczą sprowadziliśmy do funkcji Bessela J_1 . Wyprowadzimy jeszcze prosty jej związek z funkcją J_0 . Różniczkując mianowicie równość (54.3) względem a i dzieląc następnie wynik przez $-a\lambda$, znajdujemy

$$\frac{\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2})}{\sqrt{s^2 + a^2}} = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{a^{2\nu} t^\nu}{2^{2\nu} (\nu!)^2} (t+2\lambda)^\nu \right\}$$

i wobec (53.6)

$$(54.4) \quad \frac{\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2})}{\sqrt{s^2 + a^2}} = \{J_0(a\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}.$$

Wzory (54.3) i (54.4) są ważne przy $\lambda \geq 0$ i wszelkim a zespolonym. W szczególności, zastępując w tych wzorach a przez ia mamy

$$(54.5) \quad \begin{aligned} \exp \lambda(s - \sqrt{s^2 - a^2}) &= 1 - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} ia J_1(ia\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\}, \\ \frac{\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 - a^2})}{\sqrt{s^2 - a^2}} &= \{J_0(ia\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$s - \sqrt{(s-a)^2 + \beta^2} = a + T^a(s - \sqrt{s^2 + \beta^2}),$$

więc na podstawie wzorów (54.3) i (54.4) mamy

$$(54.6) \quad \begin{aligned} \exp \lambda(s - \sqrt{(s-a)^2 + \beta^2}) &= e^{a\lambda} - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} e^{a(\lambda+t)} \beta J_1(\beta\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\}, \\ \frac{\exp \lambda(s - \sqrt{(s-a)^2 + \beta^2})}{\sqrt{(s-a)^2 + \beta^2}} &= \{e^{a(\lambda+t)} J_0(\beta\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}. \end{aligned}$$

Zastępując we wzorach (54.6) a przez $-a$ oraz β przez ia , mamy

$$(54.7) \quad \begin{aligned} \exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + 2as}) &= e^{-a\lambda} - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} e^{-a(\lambda+t)} ia J_1(ia\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\}, \\ \frac{\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + 2as})}{\sqrt{s^2 + 2as}} &= \{e^{-a(\lambda+t)} J_0(ia\sqrt{t^2 + 2\lambda t})\}. \end{aligned}$$

Mnożąc wyrażenia (54.3)–(54.7) przez $e^{-\lambda s}$, łatwo znajdujemy związki dla funkcji wykładniczych

$$\begin{aligned} &\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + a^2}), \quad \exp(-\lambda\sqrt{s^2 - a^2}), \\ &\exp(-\lambda\sqrt{(s-a)^2 + \beta^2}) \quad \text{i} \quad \exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2as}). \end{aligned}$$

Mamy więc na przykład

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda\sqrt{(s-a)^2 + \beta^2}) &= \\ &= e^{a\lambda} e^{-\lambda s} - \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda \\ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} e^{at} \beta J_1(\beta\sqrt{t^2 - \lambda^2}) & \text{dla } 0 \leq \lambda < t \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{(s-a)^2 + \beta^2})}{\sqrt{(s-a)^2 + \beta^2}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda \\ e^{at} J_0(\beta\sqrt{t^2 - \lambda^2}) & \text{dla } 0 \leq \lambda < t \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2as}) &= \\ &= e^{a\lambda} e^{-\lambda s} - \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda \\ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} e^{-at} \cdot ia J_1(ia\sqrt{t^2 - \lambda^2}) & \text{dla } 0 \leq \lambda < t \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\frac{\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2as})}{\sqrt{s^2 + 2as}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda \\ e^{-at} J_0(ia\sqrt{t^2 - \lambda^2}) & \text{dla } 0 \leq \lambda < t \end{cases}.$$

ROZDZIAŁ VIII

Równanie telegrafistów

§ 55. Ogólna postać równania telegrafistów

Teoria obwodów elektrycznych, którą omówiliśmy w rozdziale V części I, odnosi się do tak zwanych *linii krótkich*. W przypadkach *linii długich* (na przykład telegraficznych) musi się uwzględnić skończoną szybkość przenoszenia się prądu, co w konsekwencji prowadzi do równań różniczkowych cząstkowych, a w ujęciu operatorowym do równań różniczkowych operatorowych.

Wyobraźmy sobie, że kabel elektryczny, złożony z dwóch równoległych przewodów, jest rozciągnięty wzdłuż osi λ . Oznaczmy przez $U(\lambda, t)$ i $I(\lambda, t)$ napięcie i natężenie prądu przypadające w chwili t na punkt kabla o współrzędnej λ . Między funkcjami U i I zachodzą następujące związki:

$$(55.1) \quad \begin{aligned} U_{\lambda} &= -LI_t - RI, \\ I_{\lambda} &= -CU_t - GU, \end{aligned}$$

gdzie R oznacza opór, G upływność, L samoindukcję i C pojemność; wielkości te są mierzone na jednostce długości kabla.

Załóżmy jeszcze, że w chwili $t=0$ przez kabel nie przepływa żaden prąd i że napięcie jest wszędzie równe zeru:

$$U(\lambda, 0) = 0, \quad I(\lambda, 0) = 0.$$

Wtedy równania (55.1) mają następującą postać operatorową:

$$(55.2) \quad U'(\lambda) = -(Ls + R)I(\lambda),$$

$$(55.3) \quad I'(\lambda) = -(Cs + G)U(\lambda).$$

Różniczkując (55.2) względem λ , mamy

$$U''(\lambda) = -(Ls + R)I'(\lambda)$$

i wobec (55.3)

$$U''(\lambda) = (Ls + R)(Cs + G)U(\lambda);$$

jest to *równanie telegrafistów* w postaci operatorowej. Wykonując mnożenie i przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę, możemy jeszcze napisać

$$U''(\lambda) - [LCs^2 + (RC + LG)s + RG]U(\lambda) = 0.$$

Eliminując $U(\lambda)$ z równań (55.2) i (55.3), sprawdzamy łatwo, że funkcja $I(\lambda)$ spełnia to samo równanie

$$I''(\lambda) - [LCs^2 + (RC + LG)s + RG]I(\lambda) = 0.$$

Przedyskutujemy to równanie najpierw w pewnych przypadkach szczególnych.

§ 56. Przewodnictwo bez strat

Przewodzenie prądu nigdy nie odbywa się bez strat. Są one spowodowane oporem R i upływnością prądu G . Jeżeli jednak wielkości R i G są małe, a samoindukcja L i pojemność C są duże, to w przybliżeniu możemy przyjąć

$$R = 0 \quad \text{ i } \quad G = 0.$$

Wtedy równanie telegrafistów redukuje się do postaci

$$U''(\lambda) - LCs^2 U(\lambda) = 0 \quad (L > 0, C > 0).$$

Jeżeli przyjmiemy, że kabel jest bardzo długi i że w jego punkcie początkowym włączamy siłę elektromotoryczną $E = \{E(t)\}$

$$U(0) = E,$$

to matematyczne zagadnienie przedstawia się tak samo jak w przypadku struny drgającej nieskończenie długiej. Wobec tego możemy na podstawie paragrafu 22 napisać od razu rozwiązanie, przyjmując $a^2 = LC$,

$$U(\lambda) = e^{-\lambda s \sqrt{LC}} E,$$

czyli

$$U(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda \sqrt{LC}, \\ E(t - \lambda \sqrt{LC}) & \text{dla } 0 \leq \lambda \sqrt{LC} < t. \end{cases}$$

W rozważanym przypadku fala napięcia posuwa się z prędkością $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Łatwo też jest wyznaczyć natężenie prądu, gdyż wobec (55.2) mamy

$$I(\lambda) = -\frac{1}{Ls} U'(\lambda) = \sqrt{\frac{C}{L}} E \exp(-\sqrt{LC} \lambda s),$$

czyli

$$I(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda\sqrt{LC}, \\ \sqrt{\frac{C}{L}} E(t - \lambda\sqrt{LC}) & \text{dla } 0 \leq \lambda\sqrt{LC} < t. \end{cases}$$

§ 57. Przewodnictwo bez zniekształcenia

Heaviside pierwszy zwrócił uwagę na to, że w przypadku ogólniejszym

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (L > 0, C > 0)$$

napięcia i natężenia prądu przenoszą się tak samo jak w przypadku przewodnictwa bez strat, z tą jedyną różnicą, że amplituda fali jest wykładniczo tłumiona w miarę posuwania się naprzód.

Istotnie, równanie telegrafistów ma w tym przypadku postać

$$U''(\lambda) - (as + \beta)^2 U(\lambda) = 0 \quad (a = \sqrt{LC}, \beta = \sqrt{RG}).$$

Szukając funkcji wykładniczych $e^{\lambda w}$ spełniających to równanie dochodzimy do równości

$$w^2 - (as + \beta)^2 = 0,$$

skąd

$$w = -as - \beta \quad \text{lub} \quad w = as + \beta.$$

Istnieją więc dwie takie funkcje

$$e^{-(as+\beta)\lambda} \quad \text{i} \quad e^{(as+\beta)\lambda};$$

stąd mamy ogólne rozwiązanie

$$U(\lambda) = c_1 e^{-(as+\beta)\lambda} + c_2 e^{(as+\beta)\lambda}.$$

Jeżeli założymy, że $U(\lambda)$ jest funkcją parametryczną dla wszystkich $\lambda \geq 0$ i że

$$U(0) = E,$$

to podobnie jak w paragrafie 22 dochodzimy do wzoru

$$U(\lambda) = E e^{-(as+\beta)\lambda}.$$

Rozwiązanie to można też znaleźć, zważywszy, że funkcja

$$V(\lambda) = T^\gamma U(\lambda) \quad \left(\gamma = \frac{\beta}{a}\right)$$

spełnia równanie

$$V''(\lambda) - a^2 s^2 V(\lambda) = 0$$

i warunek

$$V(0) = T^\gamma E.$$

W ten sposób zapanie sprowadza się do rozwiązanej w poprzednim paragrafie i mamy

$$V(\lambda) = T^\gamma E e^{-a\lambda s},$$

a stąd

$$U(\lambda) = T^{-\gamma} V(\lambda) = E T^{-\gamma} e^{-a\lambda s} = E e^{-(as+\beta)\lambda}.$$

Pisząc rozwiązania w zwykłej, nie operatorowej postaci, mamy

$$U(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda\sqrt{LC}, \\ \exp(-\lambda\sqrt{RG}) \cdot E(t - \lambda\sqrt{LC}) & \text{dla } 0 \leq \lambda\sqrt{LC} < t, \end{cases}$$

a wobec (55.2)

$$I(\lambda) = -\frac{1}{Ls + R} U'(\lambda) = \frac{as + \beta}{Ls + R} e^{-(as+\beta)\lambda} E = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-(as+\beta)\lambda} E,$$

$$I(\lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t < \lambda\sqrt{LC}, \\ \sqrt{\frac{C}{L}} \exp(-\lambda\sqrt{RG}) \cdot E(t - \lambda\sqrt{LC}) & \text{dla } 0 \leq \lambda\sqrt{LC} < t. \end{cases}$$

§ 58. Kabel Thomsona

Przy długich liniach telegraficznych i niskiej częstotliwości prądu zmniejsza się rola indukcyjności L i upływności G i można z pewnym przybliżeniem przyjąć

$$L = 0 \quad \text{i} \quad G = 0 \quad (E > 0, C > 0).$$

Przy tych założeniach William Thomson (zwany później Lordem Kelvinem) obliczył z wystarczającą praktycznie dokładnością rozchodzenie się prądu w kablu zamorskim.

Równanie telegrafistów redukuje się w tym przypadku do postaci

$$U''(\lambda) = RCsU(\lambda),$$

jest więc formalnie identyczne z równaniem ciepła; ponieważ przyjmujemy, że linia jest długa, skorzystać możemy z rozwiązania podanego w paragrafie 37. Zakładając, że

$$U(0) = E,$$

będziemy więc mieli

$$U(\lambda) = Ee^{-\lambda\sqrt{RC}Vs},$$

gdzie $E = \{E(t)\}$ jest siłą elektromotoryczną na początku kabla.

Jeżeli w szczególności siła elektromotoryczna jest stała

$$E = \{E_0\},$$

to rozwiązanie ma postać

$$U(\lambda) = \frac{E_0}{s} e^{-\lambda\sqrt{RC}Vs},$$

czyli

$$U(\lambda, t) = E_0 \operatorname{cerf} \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}}.$$

Wobec (55.2) jest

$$I(\lambda) = -\frac{1}{R} U'(\lambda) = E_0 \sqrt{\frac{C}{R}} \cdot \frac{1}{Vs} e^{-\lambda\sqrt{RC}Vs},$$

czyli

$$I(\lambda, t) = E_0 \sqrt{\frac{C}{\pi R t}} \exp\left(-\frac{RC\lambda^2}{4t}\right).$$

§ 59. Kabel bez samoindukcji

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy

$$L = 0 \quad (R > 0, C > 0, G > 0).$$

Wtedy równanie telegrafistów ma postać

$$U''(\lambda) = (RCs + RG)U(\lambda);$$

zakładając, że kabel jest bardzo długi i że siła elektromotoryczna na jego początku jest stała $E = \{E_0\}$, będziemy mieli rozwiązanie analogiczne do podanego w paragrafie 49

$$U(\lambda) = \frac{E_0}{s} \exp(-\lambda\sqrt{RCs + RG}),$$

$$U(\lambda, t) = \frac{E_0}{2} \left[e^{-\lambda\sqrt{RG}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) - e^{\lambda\sqrt{RG}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) - 2\operatorname{ch} \lambda\sqrt{RG} \right].$$

Wobec (55.2) jest

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= -\frac{1}{R} U'(\lambda) = \frac{E_0\sqrt{RCs + RG}}{Rs} \exp(-\lambda\sqrt{RCs + RG}) = \\ &= E_0 \left(\frac{C}{\sqrt{RCs + RG}} + \frac{G}{s\sqrt{RCs + RG}} \right) \exp(-\lambda\sqrt{RCs + RG}); \end{aligned}$$

stad na podstawie wzorów (48.7) i (48.10)

$$\begin{aligned} I(\lambda, t) &= \sqrt{\frac{C}{R}} \frac{E_0}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{Gt}{C} - \frac{RC\lambda^2}{4t}\right) + \\ &+ \sqrt{\frac{G}{R}} \cdot \frac{E_0}{2} \left[e^{-\lambda\sqrt{RG}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) + \right. \\ &\left. + e^{\lambda\sqrt{RG}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} + \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) - 2\operatorname{sh} \lambda\sqrt{RG} \right]. \end{aligned}$$

§ 60. Kabel bez upływności

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy

$$G = 0 \quad (L > 0, C > 0, R > 0).$$

Przypadek ten jest często stosowany w praktyce, gdyż w wielu obliczeniach upływ prądu jest tak mały, że można go nie uwzględniać.

Teraz równanie operatorowe telegrafistów ma postać

$$(60.1) \quad U''(\lambda) = (LCs^2 + RCs)U(\lambda),$$

oczywiście przy założeniach, że w chwili $t=0$ nie ma w linii żadnego napięcia ani natężenia.

Ogólnym rozwiązaniem tego równania jest wyrażenie

$$U(\lambda) = c_1 e^{-\lambda \sqrt{LCs^2 + RCs}} + c_2 e^{\lambda \sqrt{LCs^2 + RCs}}.$$

Jeżeli rozwiązanie ma być funkcją parametryczną w przedziale $0 \leq \lambda < \infty$, to musi być $c_2 = 0$. Istotnie, mamy

$$\sqrt{LCs^2 + RCs} = s \sqrt{LC} + a,$$

gdzie $a = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{R}{L}\right)^n l^n$ jest elementem klasy \mathcal{C} ; wobec tego można napisać

$$e^{-a\lambda} U(\lambda) - c_1 e^{-\sqrt{LC}\lambda s} e^{-2\lambda a} = c_2 e^{\sqrt{LC}\lambda s}.$$

Jeżeli $U(\lambda)$ jest funkcją parametryczną w przedziale $0 \leq \lambda < \infty$, to wyrażenie po lewej stronie równości jest również funkcją parametryczną w tym przedziale. A stąd już wynika, że $c_2 = 0$ (zob. § 22).

Zakładając więc, że linia telegraficzna jest długa, będziemy mieli rozwiązanie kształtu

$$U(\lambda) = E \cdot \exp(-\lambda \sqrt{LCs^2 + RCs}),$$

gdzie $E = \{E(t)\}$ jest napięciem w początkowym punkcie $\lambda=0$ rozważanej linii.

Przedyskutujemy jeszcze przypadek, gdy siła elektromotoryczna jest stała

$$E = \{E_0\} = \frac{E_0}{s}.$$

Wtedy rozwiązanie ma postać

$$U(\lambda) = \frac{E_0}{s} \exp(-\lambda \sqrt{LCs^2 + RCs}).$$

Wobec (55.2) możemy też łatwo znaleźć natężenie prądu

$$I(\lambda) = -\frac{U'(\lambda)}{Ls + R} = \frac{E_0 C}{\sqrt{LCs^2 + RCs}} \exp(-\lambda \sqrt{LCs^2 + RCs}).$$

Stąd, zakładając, że $a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{L}}$, i korzystając z wzorów z paragrafu 54, mamy dla $0 \leq t < \sqrt{LC}\lambda$:

$$U(\lambda, t) = E_0 \left(e^{-a\lambda \sqrt{LC}} - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{LC}\lambda}^t \frac{\sqrt{RC}\lambda}{\sqrt{\tau^2 - LC\lambda^2}} e^{-a\tau} i J_1(i a \sqrt{\tau^2 - LC\lambda^2}) d\tau \right),$$

$$I(\lambda, t) = E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-a\lambda \sqrt{LC}} J_0(i a \sqrt{t^2 - LC\lambda^2}).$$

Dla $0 \leq t < \sqrt{LC}\lambda$ obie funkcje $U(\lambda, t)$ i $I(\lambda, t)$ mają wartość 0.

Widać stąd, że w obecnym przypadku fala prądu posuwa się z prędkością $\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Gdy czoło fali dochodzi do punktu o współrzędnej λ , napięcie i natężenie mają odpowiednie wartości

$$E_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{L}} \lambda\right), \quad E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{RC} \lambda\right).$$

§ 61. Przypadek, gdy wszystkie cztery parametry przewodnictwa są dodatnie

Wprowadzając oznaczenia

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right),$$

można równanie telegrafistów napisać w postaci

$$U''(\lambda) - LC[(s + \alpha)^2 - \beta^2]U(\lambda) = 0.$$

Stąd rozwiązanie

$$U(\lambda) = c_1 \exp(-\lambda \sqrt{LC} \sqrt{(s + \alpha)^2 - \beta^2}) + c_2 \exp(\lambda \sqrt{LC} \sqrt{(s + \alpha)^2 - \beta^2}).$$

Gdy linia jest bardzo długa, to rozumując podobnie jak w poprzednim przypadku, można przyjąć, że $c_2 = 0$ i $c_1 = E$ (siła elektromotoryczna na początku kabla). W szczególności, gdy $E = \{E_0\} = \frac{E_0}{s}$, to mamy

$$U(\lambda) = \frac{E_0}{s} \exp(-\lambda \sqrt{LC} \sqrt{(s + \alpha)^2 - \beta^2}).$$

Wobec (55.2) jest

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= -\frac{U'(\lambda)}{Ls + R} = E_0 \frac{\sqrt{LC} \sqrt{(s + \alpha)^2 - \beta^2}}{s(Ls + R)} \exp(-\lambda \sqrt{LC} \sqrt{(s + \alpha)^2 - \beta^2}) = \\ &= E_0 \sqrt{\frac{C}{R}} \left(1 + \frac{G}{Cs}\right) \frac{\exp(-\lambda \sqrt{LC} \sqrt{(s + \alpha)^2 - \beta^2})}{\sqrt{(s + \alpha)^2 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Stąd dla $0 \leq t < \sqrt{LC} \lambda$ odczytujemy

$$\begin{aligned} U(\lambda, t) &= E_0 \left(e^{-\alpha \lambda \sqrt{LC}} - \int_{\sqrt{LC} \lambda}^t \frac{\lambda \sqrt{LC}}{\sqrt{\tau^2 - \lambda^2 LC}} e^{-\alpha \tau} i \beta J_1(i \beta \sqrt{\tau^2 - LC \lambda^2}) d\tau \right), \\ I(\lambda, t) &= E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \left(e^{-\alpha t} J_0(i \beta \sqrt{t^2 - LC \lambda^2}) + \frac{G}{C} \int_{\sqrt{LC} \lambda}^t e^{-\alpha \tau} J_0(i \beta \sqrt{\tau^2 - LC \lambda^2}) d\tau \right). \end{aligned}$$

Dla $0 \leq t < \sqrt{LC}$ obie funkcje $U(\lambda, t)$ i $I(\lambda, t)$ mają wartość 0.

Widać, że w miarę wzrostu λ napięcie i natężenie prądu maleją tym prędzej, im większa jest liczba α ; dlatego nazywamy α *współczynnikiem tłumienia*. Liczbę zaś β nazywamy *współczynnikiem zniekształcenia*; widzieliśmy w paragrafie 57, że gdy $\beta = 0$, to fala w ogóle nie jest zniekształcona, jest tylko tłumiona.

ROZDZIAŁ IX

Pochodna algebraiczna

§ 62. Definicja i własności

W paragrafie 48 zdefiniowaliśmy operację T^α (zależną od parametru α), która zastosowana do funkcji klasy \mathcal{K} powoduje pomnożenie ich wartości przez $e^{\alpha t}$. Wprowadzimy teraz operację D (niezależną od parametru), która zastosowana do funkcji klasy \mathcal{K} powoduje pomnożenie ich wartości przez $-t$. Jeżeli więc $a = \{a(t)\} \in \mathcal{K}$, to

$$Da = D\{a(t)\} = \{-ta(t)\}.$$

Jeżeli a i b należą do klasy \mathcal{K} , to

$$\begin{aligned} D(a + b) &= Da + Db, \\ (62.1) \quad D(ab) &= Da \cdot b + a \cdot Db. \end{aligned}$$

Istotnie,

$$D(a + b) = \{-t[a(t) + b(t)]\} = \{-ta(t)\} + \{-tb(t)\} = Da + Db,$$

$$\begin{aligned} D(ab) &= \left\{ -t \int_0^t a(t-\tau)b(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \left\{ \int_0^t (-t+\tau)a(t-\tau)b(\tau) d\tau + \int_0^t a(t-\tau) \cdot (-\tau)b(\tau) d\tau \right\} = \\ &= Da \cdot b + a \cdot Db. \end{aligned}$$

Z wzorów (62.1) widać, że operacja D ma charakterystyczne własności pochodnej. Będziemy ją nazywali *pochodną algebraiczną*.

Rozszerzmy teraz definicję pochodnej algebraicznej na dowolne operatory $a = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathcal{C}$, $q \neq 0$), przyjmując, że

$$D\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{Dp \cdot q - p \cdot Dq}{q^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że tak uogólniona operacja ma w dalszym ciągu własności (62.1), gdzie a i b mogą być już dowolnymi operatorami.

Dla każdego operatora liczbowego a mamy wzór

$$Da = 0.$$

Istotnie, można napisać

$$a = \frac{\{a\}}{\{1\}};$$

wobec tego

$$Da = \frac{\{1\}\{-at\} - \{-t\}\{a\}}{\{1\}^2} = \frac{\left\{-\frac{at^2}{2}\right\} - \left\{-\frac{at^2}{2}\right\}}{\{1\}^2} = 0.$$

Ze względu na drugi ze wzorów (62.1) mamy dotąd

$$(62.2) \quad D(ab) = a \cdot Db$$

dla każdego operatora liczbowego a i dowolnego operatora b .

Stąd wynika dalej, że dla dowolnych operatorów a i b mamy

$$D(a-b) = Da - Db,$$

gdyż

$$D(a-b) = D[a + (-1)b] = Da + (-1)Db = Da - Db.$$

Udowodnimy jeszcze, że dla dowolnych operatorów a i b ($b \neq 0$) mamy wzór

$$(62.3) \quad D\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{Da \cdot b - a \cdot Db}{b^2}.$$

Pisząc mianowicie $a = \frac{m}{n}$ i $b = \frac{p}{q}$ ($m, n, p, q \in \mathbb{C}$; $n, p, q \neq 0$), mamy

$$\begin{aligned} D\left(\frac{a}{b}\right) &= D\left(\frac{mq}{np}\right) = \frac{D(mq)np - mq D(np)}{n^2 p^2} = \\ &= \frac{(Dm \cdot q + m \cdot Dq)np - mq(Dn \cdot p + n \cdot Dp)}{n^2 p^2}; \\ \frac{Da \cdot b - a \cdot Db}{b^2} &= \frac{\frac{Dm \cdot n - m \cdot Dn}{n^2} \cdot \frac{p}{q} - \frac{m}{n} \cdot \frac{Dp \cdot q - p \cdot Dq}{q^2}}{\frac{p^2}{q^2}} = \\ &= \frac{(Dm \cdot n - m \cdot Dn)pq - mn(Dp \cdot q - p \cdot Dq)}{n^2 p^2}. \end{aligned}$$

Stąd już łatwo otrzymuje się wzór (62.3).

W szczególności mamy

$$Ds = D\left(\frac{1}{\{1\}}\right) = \frac{D1 \cdot \{1\} - 1 \cdot D\{1\}}{\{1\}^2} = \frac{0 \cdot \{1\} - 1 \cdot \{-1\}}{\{1\}^2} = \frac{\{t\}}{\{t\}} = 1.$$

Zatem pochodna algebraiczna z operatora różniczkowego jest równa liczbie 1:

$$(62.4) \quad Ds = 1.$$

Wobec drugiego z wzorów (62.1) mamy

$$Ds^2 = Ds \cdot s + s \cdot Ds = 1 \cdot s + s \cdot 1 = 2s,$$

$$Ds^3 = D(s \cdot s^2) = Ds \cdot s^2 + s \cdot Ds^2 = 1 \cdot s^2 + s \cdot 2s = 3s^2$$

i ogólnie

$$Ds^n = ns^{n-1}$$

dla każdej liczby naturalnej n .

Jeżeli

$$W = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0,$$

to wobec wzorów (62.2) i (62.4) mamy

$$DW = na_n s^{n-1} + \dots + a_1.$$

Widać więc, że pochodną algebraiczną z wielomianu operatora różniczkowego s oblicza się przez formalne zróżniczkowanie tego wielomianu względem s .

Podobnie pochodną algebraiczną z dowolnego wyrażenia wymiernego operatora s

$$\frac{\alpha_n s^n + \dots + \alpha_0}{\beta_m s^m + \dots + \beta_0}$$

można wyliczyć przez formalne zróżniczkowanie względem operatora s .

Pochodną algebraiczną można też nazwać *pochodną względem operatora s* i zamiast symbolu D używać symbolu $\frac{d}{ds}$. Na przykład:

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{s + \lambda} = -\frac{1}{(s + \lambda)^2}.$$

§ 63. Potęgi operatora $\frac{1}{s^2 + \beta^2}$

Za pomocą pochodnej algebraicznej można łatwo wyprowadzić wzory na potęgi operatora $\frac{1}{s^2 + \beta^2}$. Mamy mianowicie

$$\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \beta^2} = \frac{2\beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2} - \frac{1}{s^2 + \beta^2},$$

a stąd

$$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{1}{s^2 + \beta^2} + \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \beta^2} \right),$$

czyli

$$(63.1) \quad \frac{1}{(s^2 + \beta^2)^2} = \left\{ \frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{1}{\beta} \sin \beta t - t \cos \beta t \right) \right\}.$$

Napiszmy ogólnie dla $n = 1, 2, \dots$

$$(63.2) \quad \frac{1}{(s^2 + \beta^2)^n} = \left\{ \frac{1}{(2\beta^2)^{n-1}} \left[A_n(\beta^2 t^2) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - B_n(\beta^2 t^2) \cdot t \cos \beta t \right] \right\},$$

gdzie $A_n(x)$ i $B_n(x)$ są funkcjami, które należy wyznaczyć. Ponieważ

$$\frac{1}{s^2 + \beta^2} = \left\{ \frac{1}{\beta} \sin \beta t \right\},$$

więc

$$(63.3) \quad A_1(x) = 1, \quad B_1(x) = 0;$$

wobec (63.1) mamy

$$(63.4) \quad A_2(x) = 1, \quad B_2(x) = 1.$$

Z drugiej strony mamy

$$\frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{(s^2 + \beta^2)^{n-1}} = \frac{2(2n-1)(n-1)}{(s^2 + \beta^2)^n} - \frac{4\beta^2 n(n-1)}{(s^2 + \beta^2)^{n+1}},$$

a stąd

$$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2\beta^2 n} \frac{1}{(s^2 + \beta^2)^n} - \frac{1}{4\beta^2 n(n-1)} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{(s^2 + \beta^2)^{n-1}}$$

i na podstawie wzoru (63.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s^2 + \beta^2)^{n+1}} &= \left\{ \frac{2n-1}{2\beta^2 n} \frac{1}{(2\beta^2)^{n-1}} \left[A_n(\beta^2 t^2) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - B_n(\beta^2 t^2) \cdot t \cos \beta t \right] \right\} - \\ &\quad \left\{ -\frac{t^2}{4\beta^2 n(n-1)} \frac{1}{(2\beta^2)^{n-2}} \left[A_{n-1}(\beta^2 t^2) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - B_{n-1}(\beta^2 t^2) \cdot t \cos \beta t \right] \right\}, \end{aligned}$$

czyli

$$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)^{n+1}} = \left\{ \frac{1}{(2\beta^2)^n} \left[\left(\frac{2n-1}{n} A_n(\beta^2 t^2) - \frac{\beta^2 t^2}{n(n-1)} A_{n-1}(\beta^2 t^2) \right) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - \left(\frac{2n-1}{n} B_n(\beta^2 t^2) - \frac{\beta^2 t^2}{n(n-1)} B_{n-1}(\beta^2 t^2) \right) t \cos \beta t \right] \right\}.$$

Wobec wzoru (63.2) musi więc być

$$(63.5) \quad \begin{aligned} A_{n+1}(x) &= \frac{2n-1}{n} A_n(x) - \frac{x}{n(n-1)} A_{n-1}(x), \\ B_{n+1}(x) &= \frac{2n-1}{n} B_n(x) - \frac{x}{n(n-1)} B_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Na podstawie wzorów (63.3), (63.4) i (63.5) można kolejno wyliczyć funkcje A_3, A_4, \dots i B_3, B_4, \dots . Widać, że wszystkie są wielomianami. Wielomiany te aż do $n=10$ włącznie zestawione są w załączonej na końcu książki tabelce.

Posługując się tą tabelką i wzorem (63.2) możemy na przykład od razu napisać

$$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)^4} = \left\{ \frac{1}{(2\beta^2)^3} \left[\left(\frac{5}{2} - \beta^2 t^2 \right) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - \frac{1}{2} \left(5 - \frac{\beta^2 t^2}{3} \right) t \cos \beta t \right] \right\}.$$

Obliczając pochodną algebraiczną z wzoru (63.2), znajdujemy dla $n = 1, 2, \dots$

$$-\frac{2ns}{(s^2 + \beta^2)^{n+1}} = \left\{ \frac{-t}{(2\beta^2)^{n-1}} \left[A_n(\beta^2 t^2) \frac{1}{\beta} \sin \beta t - B_n(\beta^2 t^2) \cdot t \cos \beta t \right] \right\},$$

a stąd dla $n = 2, 3, \dots$

$$(63.6) \quad \frac{s}{(s^2 + \beta^2)^n} = \left\{ \frac{1}{2(n-1)(2\beta^2)^{n-2}} \left[A_{n-1}(\beta^2 t^2) \cdot \frac{t}{\beta} \sin \beta t - B_{n-1}(\beta^2 t^2) \cdot t^2 \cos \beta t \right] \right\}.$$

Mamy więc na przykład

$$\frac{s}{(s^2 + \beta^2)^4} = \left\{ \frac{1}{48\beta^4} \left[(3 - \beta^2 t^2) \frac{t}{\beta} \sin \beta t - 3t^2 \cos \beta t \right] \right\}.$$

Stosując operację T^α (zob. § 48) do wzorów (63.2) i (63.6), otrzymujemy wzory ogólniejsze:

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{(2\beta^2)^{n-1}} \left[A_n(\beta^2 t^2) \cdot \frac{1}{\beta} \sin \beta t - B_n(\beta^2 t^2) \cdot t \cos \beta t \right] \right\}$$

dla $n=1, 2, \dots$ i

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \left\{ \frac{e^{\alpha t}}{2(n-1)(2\beta^2)^{n-2}} \left[A_{n-1}(\beta^2 t^2) \cdot \frac{t}{\beta} \sin \beta t - B_{n-1}(\beta^2 t^2) \cdot t^2 \cos \beta t \right] \right\}$$

dla $n=2, 3, \dots$

OZĘŚĆ TRZECIA

SZKIC OGÓLNEJ TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH

ROZDZIAŁ I

Równania jednorodne

§ 1. Uwagi wstępne

Równanie struny drgającej, równanie ciepła i równanie telegrafistów są przykładami równań różniczkowych liniowych o współczynnikach stałych; mają one postać

$$x'' - \alpha^2 s^2 x = 0, \quad x'' - \alpha s x = 0, \quad x'' - (Ls + R)(Cs + G)x = 0.$$

Obecnie zajmujemy się równaniami ogólniejszymi

$$(1.1) \quad a_m x^{(m)} + \dots + a_0 x = f(\lambda);$$

współczynniki a_m, \dots, a_0 ($a_m \neq 0$) mogą być dowolnymi operatorami, $f(\lambda)$ dowolną funkcją operatorową ciągłą; $x = x(\lambda)$ jest funkcją operatorową niewiadomą. W szczególnym przypadku, gdy operatory a_m, \dots, a_0 są liczbami a $f(\lambda)$ funkcją liczbową, równanie (1.1) może być traktowane jako zwykłe równanie różniczkowe o współczynnikach stałych; wobec tego teoria, którą tu naszkicujemy, może być uważana za uogólnienie klasycznej teorii tych ostatnich równań.

W rozdziale pierwszym omówimy równania jednorodne, to znaczy takie, w których funkcja $f(\lambda)$ jest tożsamościowo równa zeru.